

Лекция 1. Введение

Теория и практика обработки сигналов и полей

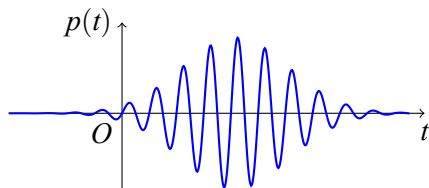
Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

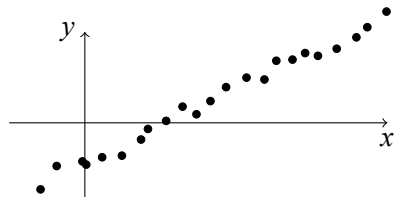
Что такое сигналы?

Определение 1.1

Сигнал — изменение физической величины во времени и/или пространстве, несущее кодированную определённым способом информацию, либо синхронизированное (заранее оговоренное с получателем) отсутствие изменения физической величины



Скалярный сигнал



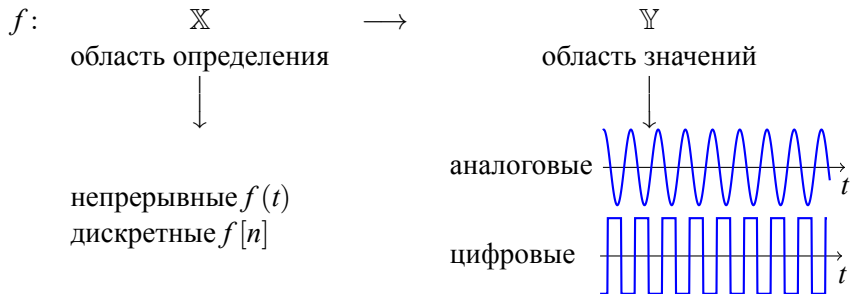
Векторный сигнал

Виды сигналов

- Скалярные и векторные

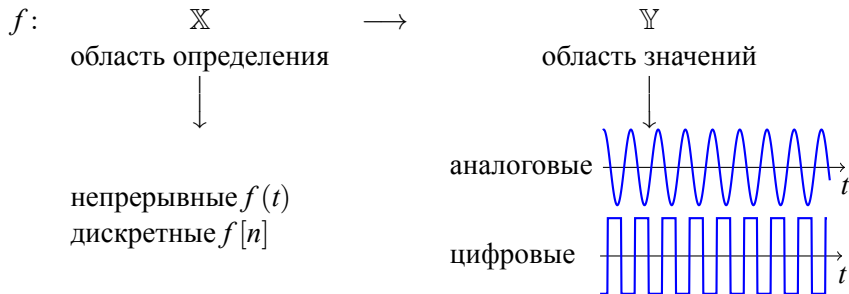
Виды сигналов

- Скалярные и векторные
- По типу отображения



Виды сигналов

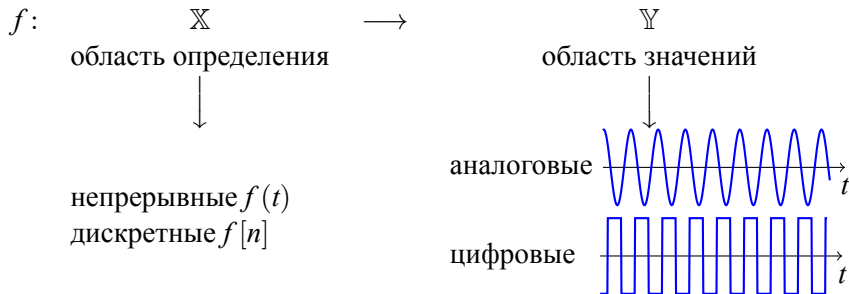
- Скалярные и векторные
- По типу отображения



- Детерминированные и случайные

Виды сигналов

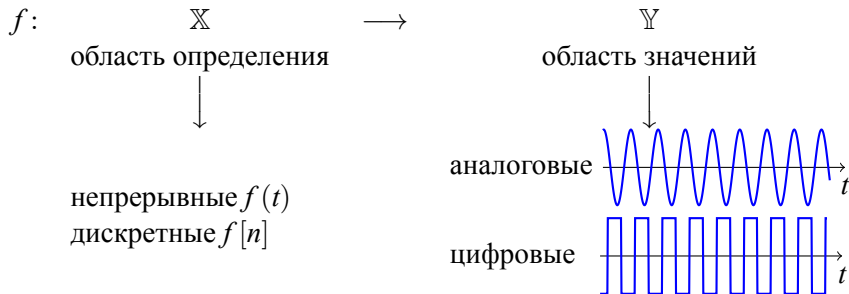
- Скалярные и векторные
- По типу отображения



- Детерминированные и случайные
- Периодические

Виды сигналов

- Скалярные и векторные
- По типу отображения



- Детерминированные и случайные
- Периодические
- Зависящие и независящие от времени и/или координат в пространстве

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$:
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$

- Энергия сигнала за время T : $E_T = \int_0^T f^2(t) dt$

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$

- Энергия сигнала за время T : $E_T = \int_0^T f^2(t) dt$

- Средняя мощность сигнала за время T : $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$

- Энергия сигнала за время T : $E_T = \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала за время T : $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала: $P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$

- Энергия сигнала за время T : $E_T = \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала за время T : $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала: $P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

- Преобразование сигналов

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$

- Энергия сигнала за время T : $E_T = \int_0^T f^2(t) dt$

- Средняя мощность сигнала за время T : $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$

- Средняя мощность сигнала: $P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$

- Преобразование сигналов
- Оценка параметров исследуемых объектов

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$

- Энергия сигнала за время T : $E_T = \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала за время T : $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала: $P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

- Преобразование сигналов
- Оценка параметров исследуемых объектов
- Проверка гипотез

Как исследовать сигналы?

- Непосредственное измерение характеристик сигнала

- Энергия сигнала $f(t)$: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$

- Энергия сигнала за время T : $E_T = \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала за время T : $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

- Средняя мощность сигнала: $P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t)dt$

- Преобразование сигналов
- Оценка параметров исследуемых объектов
- Проверка гипотез
- Выявление взаимосвязей между несколькими сигналами

Построение моделей

Определение 1.2

Модель — совокупность имеющихся или предполагаемых правил и параметров, которые определяют поведение объекта или характеристики исследуемых сигналов. Она позволяет свести описание сложной системы к (относительно) небольшому числу параметров и обладает предсказательной силой

Построение моделей

Определение 1.2

Модель — совокупность имеющихся или предполагаемых правил и параметров, которые определяют поведение объекта или характеристики исследуемых сигналов. Она позволяет свести описание сложной системы к (относительно) небольшому числу параметров и обладает предсказательной силой

Некоторые типичные примеры моделей

- Полиномиальная модель $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots$

Построение моделей

Определение 1.2

Модель — совокупность имеющихся или предполагаемых правил и параметров, которые определяют поведение объекта или характеристики исследуемых сигналов. Она позволяет свести описание сложной системы к (относительно) небольшому числу параметров и обладает предсказательной силой

Некоторые типичные примеры моделей

- Полиномиальная модель $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots$
- Циклическая модель $f(x) = A_1 \sin(\omega_1x) + A_2 \sin(\omega_2x) + \dots$

Построение моделей

Определение 1.2

Модель — совокупность имеющихся или предполагаемых правил и параметров, которые определяют поведение объекта или характеристики исследуемых сигналов. Она позволяет свести описание сложной системы к (относительно) небольшому числу параметров и обладает предсказательной силой

Некоторые типичные примеры моделей

- Полиномиальная модель $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots$
- Циклическая модель $f(x) = A_1 \sin(\omega_1x) + A_2 \sin(\omega_2x) + \dots$
- Модель скользящего среднего $f_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m g_{n-m} + \xi_n$

Построение моделей

Определение 1.2

Модель — совокупность имеющихся или предполагаемых правил и параметров, которые определяют поведение объекта или характеристики исследуемых сигналов. Она позволяет свести описание сложной системы к (относительно) небольшому числу параметров и обладает предсказательной силой

Некоторые типичные примеры моделей

- Полиномиальная модель $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots$
- Циклическая модель $f(x) = A_1 \sin(\omega_1x) + A_2 \sin(\omega_2x) + \dots$
- Модель скользящего среднего $f_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m g_{n-m} + \xi_n$
- Авторегрессионная модель $f_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m f_{n-m} + \xi_n$

Построение моделей

Определение 1.2

Модель — совокупность имеющихся или предполагаемых правил и параметров, которые определяют поведение объекта или характеристики исследуемых сигналов. Она позволяет свести описание сложной системы к (относительно) небольшому числу параметров и обладает предсказательной силой

Некоторые типичные примеры моделей

- Полиномиальная модель $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots$
- Циклическая модель $f(x) = A_1 \sin(\omega_1x) + A_2 \sin(\omega_2x) + \dots$
- Модель скользящего среднего $f_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m g_{n-m} + \xi_n$
- Авторегрессионная модель $f_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m f_{n-m} + \xi_n$
- Модель гауссовского процесса $N(\bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

Прямые и обратные задачи

Определение 1.3

Прямая задача — необходимо определить, как будет вести себя модель, все характеристики которой заданы

Прямые и обратные задачи

Определение 1.3

Прямая задача — необходимо определить, как будет вести себя модель, все характеристики которой заданы

Определение 1.4

Обратная задача — необходимо по заданному поведению объекта построить модель и определить все ее характеристики. В ряде случаев для этого объект можно подвергнуть заданному внешнему воздействию

Лекция 2. Линейные системы. Z- и Фурье преобразования

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Разложение сигнала по базисным функциям

$$f(t) = \int_s \tilde{f}(s) \Psi(s, t) ds$$

$$f(t) = \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$$

Разложение сигнала по базисным функциям

$$f(t) = \int_s \tilde{f}(s) \Psi(s, t) ds$$

$$f(t) = \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$$

Выбор «удобных» базисных функций определяется *задачей*

$$\xrightarrow{f(t)} \hat{A} \xrightarrow{g(t) = \hat{A}f(t)}$$

Разложение сигнала по базисным функциям

$$f(t) = \int_s \tilde{f}(s) \Psi(s, t) ds$$

$$f(t) = \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$$

Выбор «удобных» базисных функций определяется *задачей*

$$\xrightarrow{f(t)} \hat{A} \xrightarrow{g(t) = \hat{A}f(t)}$$

\hat{A} — линейный оператор; $\hat{A}\Psi_n(t) = \alpha_n\Psi_n(t)$

Разложение сигнала по базисным функциям

$$f(t) = \int_s \tilde{f}(s) \Psi(s, t) ds$$

$$f(t) = \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$$

Выбор «удобных» базисных функций определяется *задачей*

$$\xrightarrow{f(t)} \hat{A} \xrightarrow{g(t) = \hat{A}f(t)}$$

\hat{A} — линейный оператор; $\hat{A}\Psi_n(t) = \alpha_n \Psi_n(t)$

$$\hat{A}f(t) = \hat{A} \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t) = \sum_n \tilde{f}_n \hat{A}\Psi_n(t) = \sum_n \tilde{f}_n \alpha_n \Psi_n(t) = \sum_n \tilde{g}_n \Psi_n(t) = g(t)$$

Разложение сигнала по базисным функциям

$$f(t) = \int_s \tilde{f}(s) \Psi(s, t) ds$$

$$f(t) = \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t)$$

Выбор «удобных» базисных функций определяется *задачей*

$$\xrightarrow{f(t)} \hat{A} \xrightarrow{g(t) = \hat{A}f(t)}$$

\hat{A} — линейный оператор; $\hat{A}\Psi_n(t) = \alpha_n \Psi_n(t)$

$$\hat{A}f(t) = \hat{A} \sum_n \tilde{f}_n \Psi_n(t) = \sum_n \tilde{f}_n \hat{A}\Psi_n(t) = \sum_n \tilde{f}_n \alpha_n \Psi_n(t) = \sum_n \tilde{g}_n \Psi_n(t) = g(t)$$

$$\tilde{g}_n = \alpha_n \cdot \tilde{f}_n$$

Линейные инвариантные по времени системы

Определения

Определение 2.1

Линейная система — система, сигнал на выходе которой g связан с сигналом на ее входе f с помощью линейного оператора \hat{A} :

$$g(t) = \hat{A}(\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)) = \xi_1 \underbrace{\hat{A}f_1(t)}_{g_1(t)} + \xi_2 \underbrace{\hat{A}f_2(t)}_{g_2(t)}$$

$$g[n] = \xi_1 \underbrace{\hat{A}f_1[n]}_{g_1[n]} + \xi_2 \underbrace{\hat{A}f_2[n]}_{g_2[n]}$$

Линейные инвариантные по времени системы

Определения

Определение 2.1

Линейная система — система, сигнал на выходе которой g связан с сигналом на ее входе f с помощью линейного оператора \hat{A} :

$$g(t) = \hat{A}(\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)) = \xi_1 \underbrace{\hat{A}f_1(t)}_{g_1(t)} + \xi_2 \underbrace{\hat{A}f_2(t)}_{g_2(t)}$$

$$g[n] = \xi_1 \underbrace{\hat{A}f_1[n]}_{g_1[n]} + \xi_2 \underbrace{\hat{A}f_2[n]}_{g_2[n]}$$

Определение 2.2

Инвариантная по времени система — система, сигнал на выходе которой g связан с сигналом на ее входе f с помощью оператора \hat{A} , который не зависит от времени.

Линейные инвариантные по времени системы

$$\begin{aligned}g(t) &= \hat{A}f(t) = \\ &= \hat{A} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau =\end{aligned}$$

Линейные инвариантные по времени системы

$$\begin{aligned}g(t) &= \hat{A}f(t) = \\&= \hat{A} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \\&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\hat{A}\delta(t - \tau)d\tau =\end{aligned}$$

Линейные инвариантные по времени системы

$$\begin{aligned}g(t) &= \hat{A}f(t) = \\&= \hat{A} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \\&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\hat{A}\delta(t-\tau)d\tau = \\&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau =\end{aligned}$$

Линейные инвариантные по времени системы

$$\begin{aligned}g(t) &= \hat{A}f(t) = \\&= \hat{A} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \\&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\hat{A}\delta(t-\tau)d\tau = \\&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \\&= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

Линейные инвариантные по времени системы

Определения

Определение 2.3

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика

$$h(\tau) \text{ (для непрерывных сигналов): } g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

или

$$h[m] \text{ (для дискретных сигналов): } g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]f[n - m]$$

Линейные инвариантные по времени системы

Определения

Определение 2.3

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика

$$h(\tau) \text{ (для непрерывных сигналов): } g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

или

$$h[m] \text{ (для дискретных сигналов): } g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]f[n - m]$$

Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = h(t)$$

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\delta[n - m] = h[n]$$

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g(t) = \hat{A}f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g(t) = \hat{A}f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Пусть $f(t) = z^t$. Тогда

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{t-\tau}d\tau = z^t \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau = f(t) \overbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau}^{H(z)}$$

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g(t) = \hat{A}f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Пусть $f(t) = z^t$. Тогда

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{t-\tau}d\tau = z^t \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau = f(t) \overbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau}^{H(z)}$$

Определение 2.4

$$H(z) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau \text{ — непрерывная системная функция}$$

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g(t) = \hat{A}f(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Пусть $f(t) = z^t$. Тогда

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{t-\tau}d\tau = z^t \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau = f(t) \overbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau}^{H(z)}$$

Определение 2.4

$$H(z) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)z^{-\tau}d\tau \text{ — непрерывная системная функция}$$

$f(t) = z^t$ — собственные функции оператора \hat{A}

$H(z)$ — собственные значения оператора \hat{A}

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g[n] = \hat{A}f[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]f[n-m]$$

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g[n] = \hat{A}f[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]f[n-m]$$

Пусть $f[n] = z^n$. Тогда

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{n-m} = z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m} = f[n] \overbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}}^{H(z)}$$

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g[n] = \hat{A}f[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]f[n-m]$$

Пусть $f[n] = z^n$. Тогда

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{n-m} = z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m} = f[n] \overbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}}^{H(z)}$$

Определение 2.5

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m} \text{ — дискретная системная функция}$$

Линейные инвариантные по времени системы

Собственные функции и собственные значения

$$g[n] = \hat{A}f[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]f[n-m]$$

Пусть $f[n] = z^n$. Тогда

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{n-m} = z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m} = f[n] \overbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}}^{H(z)}$$

Определение 2.5

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m} \text{ — дискретная системная функция}$$

$f[n] = z^n$ — собственные функции оператора \hat{A}

$H(z)$ — собственные значения оператора \hat{A}

Z-преобразование

Определение

Прямое преобразование

$$\mathbb{Z} \{h[n]\} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{Z}^{-1} \{H(z)\} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C H(z)z^{n-1} dz$$

Контур C охватывает область сходимости $H(z)$ и содержит все вычеты $H(z)$

Z-преобразование

Свойства

- **Линейность:**

$$\mathbb{Z} \{ \xi_1 f_1[n] + \xi_2 f_2[n] \} = \xi_1 \mathbb{Z} \{ f_1[n] \} + \xi_2 \mathbb{Z} \{ f_2[n] \}$$

Z-преобразование

Свойства

- **Линейность:**

$$\mathbb{Z} \{ \xi_1 f_1[n] + \xi_2 f_2[n] \} = \xi_1 \mathbb{Z} \{ f_1[n] \} + \xi_2 \mathbb{Z} \{ f_2[n] \}$$

- **Задержка:**

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \{ f[n - k] \} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n - k - m] z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n - k - m] z^{-k-m} = \\ &= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n - m] z^{-m} = z^{-k} \mathbb{Z} \{ f[n] \} \end{aligned}$$

Z-преобразование

Свойства

- **Линейность:**

$$\mathbb{Z} \{ \xi_1 f_1[n] + \xi_2 f_2[n] \} = \xi_1 \mathbb{Z} \{ f_1[n] \} + \xi_2 \mathbb{Z} \{ f_2[n] \}$$

- **Задержка:**

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \{ f[n-k] \} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-k-m] z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-k-m] z^{-k-m} = \\ &= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-m] z^{-m} = z^{-k} \mathbb{Z} \{ f[n] \} \end{aligned}$$

- **Теорема о свертке:** $\mathbb{Z} \{ f[n] * g[n] \} \equiv \mathbb{Z} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] g[n-m] \right\} =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] g[n-m] \right) z^{-n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-m] z^{-n} \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] \mathbb{Z} \{ g[n] \} z^{-m} =$$

$$= \mathbb{Z} \{ f[n] \} \cdot \mathbb{Z} \{ g[n] \}$$

Преобразование Фурье

Определение

Есть положить $z = e^{-i\omega}$, получится

Прямое преобразование

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \mathbb{F}\{f(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Обратное преобразование

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Преобразование Фурье

Свойства

- **Линейность:** $\mathbb{F} \{ \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) \} = \xi_1 \mathbb{F} \{ f_1(t) \} + \xi_2 \mathbb{F} \{ f_2(t) \}$

Преобразование Фурье

Свойства

- **Линейность:** $\mathbb{F} \{ \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) \} = \xi_1 \mathbb{F} \{ f_1(t) \} + \xi_2 \mathbb{F} \{ f_2(t) \}$
- **Задержка:** $\mathbb{F} \{ f(t - \tau) \} = e^{-i\omega\tau} \mathbb{F} \{ f(t) \}$

Преобразование Фурье

Свойства

- **Линейность:** $\mathbb{F} \{ \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) \} = \xi_1 \mathbb{F} \{ f_1(t) \} + \xi_2 \mathbb{F} \{ f_2(t) \}$
- **Задержка:** $\mathbb{F} \{ f(t - \tau) \} = e^{-i\omega\tau} \mathbb{F} \{ f(t) \}$
- **Теорема о свертке:**

$$\mathbb{F} \{ f(t) * g(t) \} \equiv \mathbb{F} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \mathbb{F} \{ f(t) \} \cdot \mathbb{F} \{ g(t) \}$$

Преобразование Фурье

Свойства

- **Линейность:** $\mathbb{F} \{ \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) \} = \xi_1 \mathbb{F} \{ f_1(t) \} + \xi_2 \mathbb{F} \{ f_2(t) \}$
- **Задержка:** $\mathbb{F} \{ f(t - \tau) \} = e^{-i\omega\tau} \mathbb{F} \{ f(t) \}$

- **Теорема о свертке:**

$$\mathbb{F} \{ f(t) * g(t) \} \equiv \mathbb{F} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right\} = \mathbb{F} \{ f(t) \} \cdot \mathbb{F} \{ g(t) \}$$

- **Обратная теорема:** $\mathbb{F} \{ f(t) \cdot g(t) \} = \mathbb{F} \{ f(t) \} * \mathbb{F} \{ g(t) \}$

Преобразование Фурье

Свойства

- **Линейность:** $\mathbb{F} \{ \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) \} = \xi_1 \mathbb{F} \{ f_1(t) \} + \xi_2 \mathbb{F} \{ f_2(t) \}$
- **Задержка:** $\mathbb{F} \{ f(t - \tau) \} = e^{-i\omega\tau} \mathbb{F} \{ f(t) \}$

- **Теорема о свертке:**

$$\mathbb{F} \{ f(t) * g(t) \} \equiv \mathbb{F} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \mathbb{F} \{ f(t) \} \cdot \mathbb{F} \{ g(t) \}$$

- **Обратная теорема:** $\mathbb{F} \{ f(t) \cdot g(t) \} = \mathbb{F} \{ f(t) \} * \mathbb{F} \{ g(t) \}$

- **Равенство Парсеваля:** $\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |\mathbb{F} \{ f(t) \}|^2 d\omega = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$

Преобразование Фурье

Свойства

- **Линейность:** $\mathbb{F} \{ \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) \} = \xi_1 \mathbb{F} \{ f_1(t) \} + \xi_2 \mathbb{F} \{ f_2(t) \}$
- **Задержка:** $\mathbb{F} \{ f(t - \tau) \} = e^{-i\omega\tau} \mathbb{F} \{ f(t) \}$

- **Теорема о свертке:**

$$\mathbb{F} \{ f(t) * g(t) \} \equiv \mathbb{F} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \mathbb{F} \{ f(t) \} \cdot \mathbb{F} \{ g(t) \}$$

- **Обратная теорема:** $\mathbb{F} \{ f(t) \cdot g(t) \} = \mathbb{F} \{ f(t) \} * \mathbb{F} \{ g(t) \}$

- **Равенство Парсеваля:** $\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |\mathbb{F} \{ f(t) \}|^2 d\omega = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$

- **Дифференцирование:** $\mathbb{F} \{ f^{(n)}(t) \} = (i\omega)^n \mathbb{F} \{ f(t) \}$

Преобразование Фурье

Свойства

- **Линейность:** $\mathbb{F} \{ \xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t) \} = \xi_1 \mathbb{F} \{ f_1(t) \} + \xi_2 \mathbb{F} \{ f_2(t) \}$
- **Задержка:** $\mathbb{F} \{ f(t - \tau) \} = e^{-i\omega\tau} \mathbb{F} \{ f(t) \}$

- **Теорема о свертке:**

$$\mathbb{F} \{ f(t) * g(t) \} \equiv \mathbb{F} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right\} = \mathbb{F} \{ f(t) \} \cdot \mathbb{F} \{ g(t) \}$$

- **Обратная теорема:** $\mathbb{F} \{ f(t) \cdot g(t) \} = \mathbb{F} \{ f(t) \} * \mathbb{F} \{ g(t) \}$

- **Равенство Парсеваля:** $\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |\mathbb{F} \{ f(t) \}|^2 d\omega = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$

- **Дифференцирование:** $\mathbb{F} \{ f^{(n)}(t) \} = (i\omega)^n \mathbb{F} \{ f(t) \}$

- **Интегрирование:** $\mathbb{F} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{i\omega} \mathbb{F} \{ f(t) \} + \frac{\delta(\omega)}{2} \mathbb{F}_{\omega=0} \{ f(t) \}$

Преобразование Фурье

Свойства симметрии

Пусть сигнал $f(t) \in \mathfrak{R}$;

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \text{ где}$$

$$f_1(-t) = -f_1(t) \text{ — нечетная функция } t;$$

$$f_2(-t) = f_2(t) \text{ — четная функция } t.$$

Преобразование Фурье

Свойства симметрии

Пусть сигнал $f(t) \in \mathfrak{R}$;

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \text{ где}$$

$$f_1(-t) = -f_1(t) \text{ — нечетная функция } t;$$

$$f_2(-t) = f_2(t) \text{ — четная функция } t.$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \longrightarrow \mathbb{F} \{f_1(t)\} \in \mathfrak{S};$$

$$\mathbb{F} \{f_2(t)\} \in \mathfrak{R}.$$

Преобразование Фурье

Свойства симметрии

Пусть сигнал $f(t) \in \mathfrak{R}$;

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \text{ где}$$

$$f_1(-t) = -f_1(t) \text{ — нечетная функция } t;$$

$$f_2(-t) = f_2(t) \text{ — четная функция } t.$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \longrightarrow \mathbb{F} \{f_1(t)\} \in \mathfrak{S};$$

$$\mathbb{F} \{f_2(t)\} \in \mathfrak{R}.$$

$$\operatorname{Re} \mathbb{F} \{f(t)\} \text{ — четная функция } \omega;$$

$$\operatorname{Im} \mathbb{F} \{f(t)\} \text{ — нечетная функция } \omega.$$

Преобразование Фурье

Некоторые формулы

- $\mathbb{F}\{\delta(t)\} = 1; \mathbb{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$

Преобразование Фурье

Некоторые формулы

- $\mathbb{F} \{ \delta(t) \} = 1; \mathbb{F} \{ 1 \} = 2\pi\delta(\omega)$
- $\mathbb{F} \{ \text{sgn}(t) \} = \frac{2}{i\omega}$
- $\mathbb{F} \{ \theta(t) \} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$

Преобразование Фурье

Некоторые формулы

- $\mathbb{F} \{ \delta(t) \} = 1; \mathbb{F} \{ 1 \} = 2\pi\delta(\omega)$
- $\mathbb{F} \{ \text{sgn}(t) \} = \frac{2}{i\omega}$
- $\mathbb{F} \{ \theta(t) \} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
- $\mathbb{F} \{ e^{i\omega_0 t} \} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
- $\mathbb{F} \{ \cos(\omega_0 t) \} = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
- $\mathbb{F} \{ \sin(\omega_0 t) \} = \pi i(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$

Преобразование Фурье

Некоторые формулы

- $\mathbb{F} \{ \delta(t) \} = 1; \mathbb{F} \{ 1 \} = 2\pi\delta(\omega)$
- $\mathbb{F} \{ \text{sgn}(t) \} = \frac{2}{i\omega}$
- $\mathbb{F} \{ \theta(t) \} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
- $\mathbb{F} \{ e^{i\omega_0 t} \} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
- $\mathbb{F} \{ \cos(\omega_0 t) \} = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
- $\mathbb{F} \{ \sin(\omega_0 t) \} = \pi i(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
- $\mathbb{F} \left\{ \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t) \right\} = \text{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right)$

Лекция 3. Огибающая сигнала. Мгновенная частота и фаза

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Преобразование Фурье

Определение

Функция $f(t) \longleftrightarrow$ Спектр $\tilde{f}(\omega)$

Прямое преобразование

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \mathbb{F}\{f(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Обратное преобразование

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Мгновенная фаза и огибающая

Определение

$$\text{Функция } f(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

Мгновенная фаза и огибающая

Определение

$$\text{Функция } f(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

$A(t)$ – огибающая сигнала;

Мгновенная фаза и огибающая

Определение

$$\text{Функция } f(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

$A(t)$ – огибающая сигнала;

$\Phi(t)$ – мгновенная фаза;

Мгновенная фаза и огибающая

Определение

$$\text{Функция } f(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

$A(t)$ – огибающая сигнала;

$\Phi(t)$ – мгновенная фаза;

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \text{ – мгновенная частота.}$$

Мгновенная фаза и огибающая

Определение

$$\text{Функция } f(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

$A(t)$ – огибающая сигнала;

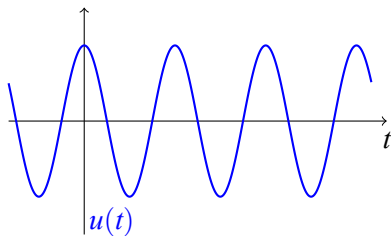
$\Phi(t)$ – мгновенная фаза;

$$\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \text{ – мгновенная частота.}$$

Такое определение не является однозначным!

Гармонический сигнал

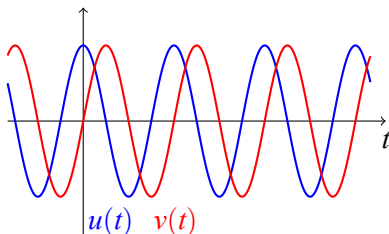
$$u(t) = A \cos \omega_0 t$$



Гармонический сигнал

$$u(t) = A \cos \omega_0 t$$

$v(t) = A \sin \omega_0 t$ – сигнал, сдвинутый на $\pi/2$

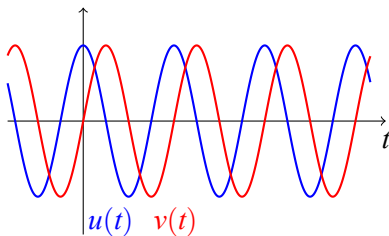


Гармонический сигнал

$$u(t) = A \cos \omega_0 t$$

$v(t) = A \sin \omega_0 t$ – сигнал, сдвинутый на $\pi/2$

$$U(t) = u(t) + iv(t) = A \exp(i\omega t)$$



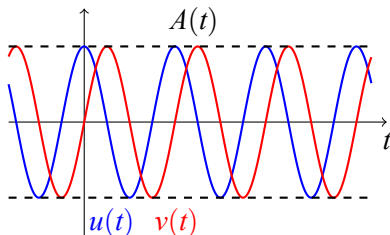
Гармонический сигнал

$$u(t) = A \cos \omega_0 t$$

$$v(t) = A \sin \omega_0 t - \text{сигнал, сдвинутый на } \pi/2$$

$$U(t) = u(t) + iv(t) = A \exp(i\omega t)$$

$$A(t) = |U(t)|; \Phi(t) = \arg(U(t))$$



Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

① $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

- 1 $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t
- 2 Общая касательная: $A'(t) = u'(t)$ при $A(t) = |u(t)|$

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

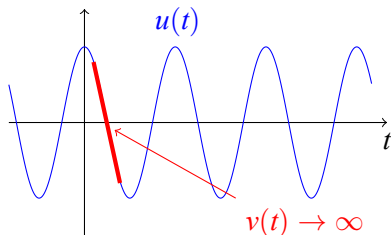
- 1 $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t
- 2 Общая касательная: $A'(t) = u'(t)$ при $A(t) = |u(t)|$
- 3 Для гармонического сигнала правило огибающая и мгновенная частота должны совпадать с “обычными”

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

- 1 $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t
- 2 Общая касательная: $A'(t) = u'(t)$ при $A(t) = u(t)$
- 3 Для гармонического сигнала правило огибающая и мгновенная частота должны совпадать с “обычными”
- 4 **Пример:** $v(t) = -u'(t) \sqrt{-u(t)/u''(t)}$



Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

- 1 $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t
- 2 Общая касательная: $A'(t) = u'(t)$ при $A(t) = |u(t)|$
- 3 Для гармонического сигнала правило огибающая и мгновенная частота должны совпадать с “обычными”
- 4 Устойчивость: малое изменение $u(t)$ мало изменяет $v(t)$

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

- 1 $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t
- 2 Общая касательная: $A'(t) = u'(t)$ при $A(t) = |u(t)|$
- 3 Для гармонического сигнала правило огибающая и мгновенная частота должны совпадать с “обычными”
- 4 Устойчивость: малое изменение $u(t)$ мало изменяет $v(t)$
- 5 Линейность: мгновенная частота и фаза не зависят от мощности сигнала

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

- 1 $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t
- 2 Общая касательная: $A'(t) = u'(t)$ при $A(t) = |u(t)|$
- 3 Для гармонического сигнала правило огибающая и мгновенная частота должны совпадать с “обычными”
- 4 Устойчивость: малое изменение $u(t)$ мало изменяет $v(t)$
- 5 Линейность: мгновенная частота и фаза не зависят от мощности сигнала

Пример: $v(t) = -u'(t)/\omega_0$ – не удовлетворяет пункту 3 при $\omega \neq \omega_0$

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Нужно **правило**, сопоставляющее функции $u(t)$ функцию $v(t)$.

- 1 $A(t) \geq |u(t)|$ для всех t
- 2 Общая касательная: $A'(t) = u'(t)$ при $A(t) = |u(t)|$
- 3 Для гармонического сигнала правило огибающая и мгновенная частота должны совпадать с “обычными”
- 4 Устойчивость: малое изменение $u(t)$ мало изменяет $v(t)$
- 5 Линейность: мгновенная частота и фаза не зависят от мощности сигнала

Построить огибающую и определить мгновенную частоту в общем случае довольно сложно!

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Исходная функция $u(t) = \sum A_n \cos(\omega_n t) + \sum B_n \sin(\omega_n t)$

Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Исходная функция $u(t) = \sum A_n \cos(\omega_n t) + \sum B_n \sin(\omega_n t)$

Сопоставим ей $v(t) = -\sum A_n \sin(\omega_n t) + \sum B_n \cos(\omega_n t)$

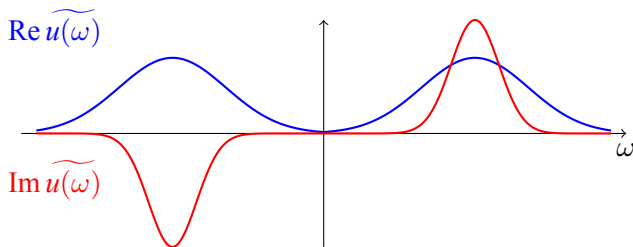
Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Исходная функция $u(t) = \sum A_n \cos(\omega_n t) + \sum B_n \sin(\omega_n t)$

Сопоставим ей $v(t) = -\sum A_n \sin(\omega_n t) + \sum B_n \cos(\omega_n t)$

Спектр действительного сигнала



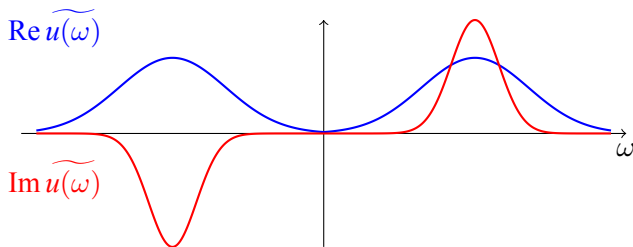
Огибающая произвольного сигнала

Как ее построить?

Исходная функция $u(t) = \sum A_n \cos(\omega_n t) + \sum B_n \sin(\omega_n t)$

Сопоставим ей $v(t) = -\sum A_n \sin(\omega_n t) + \sum B_n \cos(\omega_n t)$

Спектр действительного сигнала



На языке преобразования Фурье: $\mathbb{F}\{v(t)\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$

Огибающая произвольного сигнала

Дополнение до аналитического сигнала

$$U(t) = u(t) + iv(t)$$

$$\mathbb{F}\{v(t)\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$$

Огибающая произвольного сигнала

Дополнение до аналитического сигнала

$$U(t) = u(t) + iv(t)$$

$$\mathbb{F}\{v(t)\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\{U(t)\} &= \mathbb{F}\{u(t)\} + i\mathbb{F}\{v(t)\} = \\ &= \mathbb{F}\{u(t)\} + \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\} = \\ &= 2\theta(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\} \end{aligned}$$

Огибающая произвольного сигнала

Дополнение до аналитического сигнала

$$U(t) = u(t) + iv(t)$$

$$\mathbb{F}\{v(t)\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}\{U(t)\} &= \mathbb{F}\{u(t)\} + i\mathbb{F}\{v(t)\} = \\ &= \mathbb{F}\{u(t)\} + \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\} = \\ &= 2\theta(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\} \end{aligned}$$

Определение 3.1

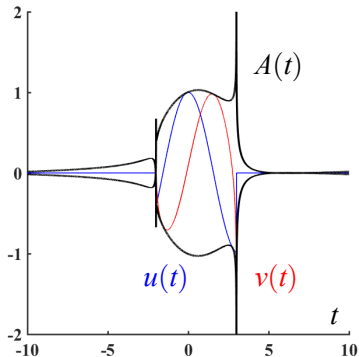
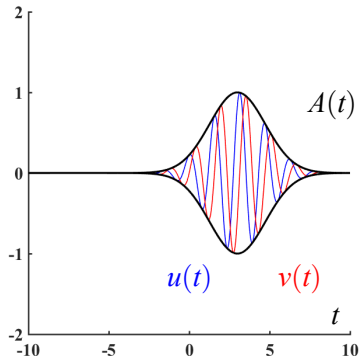
Аналитический сигнал — сигнал, спектр которого равен нулю на отрицательных частотах: $\mathbb{F}_{\omega < 0}\{U(t)\} = 0$

Огибающая произвольного сигнала

Дополнение до аналитического сигнала. Примеры

$$U(t) = u(t) + iv(t)$$

$$\mathbb{F}\{v(t)\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \mathbb{F}\{u(t)\}$$



Мгновенная частота

Амплитудно-модулированный сигнал

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$s(t) = A(1 + m \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t + \phi_0) =$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \phi_0) +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \phi_0] +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 - \Omega)t + \phi_0]$$

Мгновенная частота

Амплитудно-модулированный сигнал

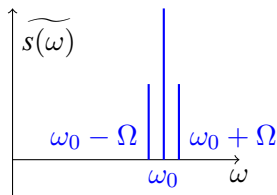
$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$s(t) = A(1 + m \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t + \phi_0) =$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \phi_0) +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \phi_0] +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 - \Omega)t + \phi_0]$$



Мгновенная частота

Амплитудно-модулированный сигнал

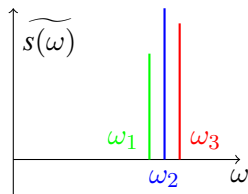
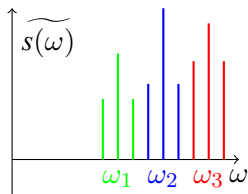
$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$s(t) = A(1 + m \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t + \phi_0) =$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \phi_0) +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \phi_0] +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 - \Omega)t + \phi_0]$$



Мгновенная частота

Амплитудно-модулированный сигнал

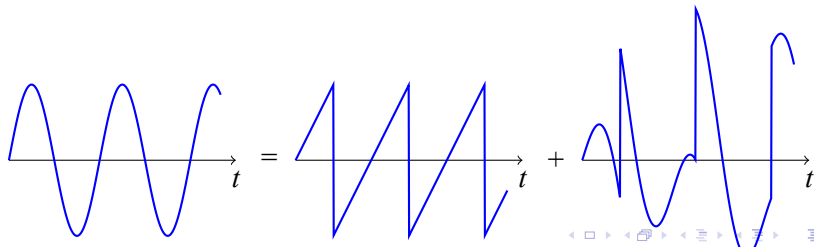
$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$s(t) = A(1 + m \cos(\Omega t)) \cos(\omega_0 t + \phi_0) =$$

$$= A \cos(\omega_0 t + \phi_0) +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 + \Omega)t + \phi_0] +$$

$$+ \frac{m}{2} A \cos [(\omega_0 - \Omega)t + \phi_0]$$



Мгновенная частота

Частотно-модулированный сигнал

$$s(t) = A \cos(\omega(t) + \phi_0); \quad \omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot x(t)$$

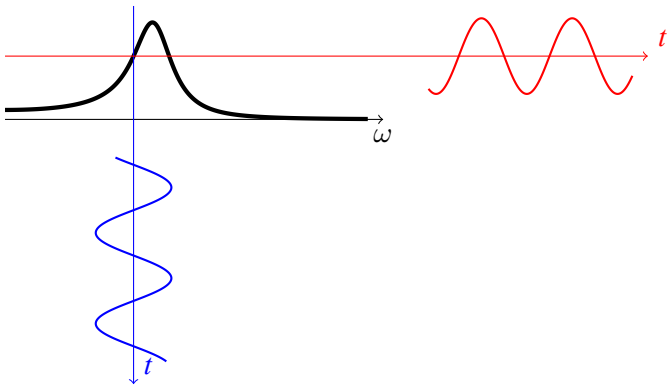
Определение 3.2

$\Delta\omega$ называется *девиацией частоты*

Мгновенная частота

Частотно-модулированный сигнал

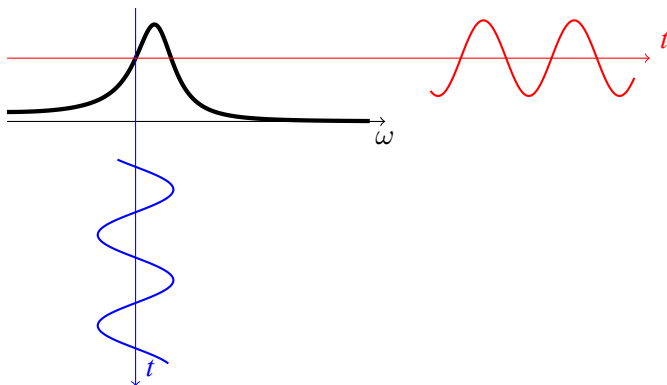
$$s(t) = A \cos(\omega(t) + \phi_0); \quad \omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot x(t)$$



Мгновенная частота

Частотно-модулированный сигнал

$$s(t) = A \cos(\omega(t) + \phi_0); \quad \omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot x(t)$$

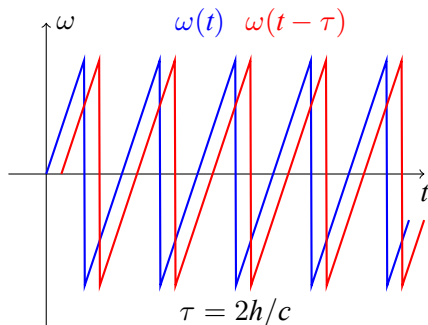


Спектр ЧМ сигнала $\omega_n = \omega_0 \pm k\Omega$ не ограничен по полосе!

Мгновенная частота или частота в спектре

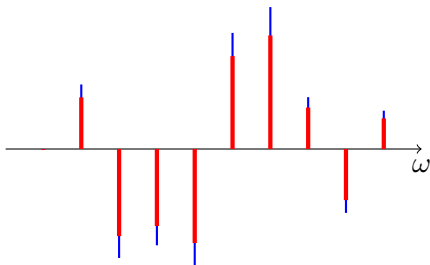
Мгновенная частота	Частота в спектре
Зависит от времени	Не зависит от времени
Единственное значение	Существует конечное, счетное или несчетное число частот
Изменяется ЛИВС	Не изменяется ЛИВС
Не служит аргументом $h(\omega)$	Служит аргументом $h(\omega)$
Определяется частотным детектором	Определяется анализатором спектра
Удобна в безынерционных нелинейных системах	Удобна в линейных системах

ЧМ альтиметр



Сдвиг частот $\sim h \rightarrow$ есть биения

ЧМ альтиметр



Частоты в исходном и отраженном сигнале одинаковы \rightarrow биений нет

ЧМ альтиметр

$$\begin{aligned}
 s_1(t) + s_2(t) &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_2(t) = / \Delta(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) / = \\
 &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos(\Phi_1(t) + \Delta(t)) = \\
 &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_1(t) \cos \Delta(t) - A_2 \sin \Phi_1(t) \sin \Delta(t) = \\
 &= \underbrace{\sqrt{(A_1(t) + A_2(t) \cos \Delta(t))^2 + A_2^2 \sin^2 \Delta(t)}}_{\approx A_1 \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \cos \Delta(t)\right) - \text{оггибающая}} \cos(\Phi_1(t) + \Psi(t))
 \end{aligned}$$

$$\tan \Psi = \frac{-A_2(t) \sin \Delta(t)}{A_1(t) + A_2(t) \cos \Delta(t)} \quad \frac{d\Delta(t)}{dt} = \omega_2(t) - \omega_1(t)$$

Практикум

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Сигналы и их преобразования. Линейные инвариантные по времени системы

Jupyter notebook “Сигналы и их преобразования. Линейные инвариантные по времени системы”:

<https://colab.research.google.com/drive/1hPqenmU8HRIRCrR1zCmilh8W5YksWcqB>

Лекция 4. Преобразование Гильберта. Причинность и дисперсия

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Аналитические сигналы

$$f(t) = \underbrace{\operatorname{Re}f(t)}_{a(t)} + i \underbrace{\operatorname{Im}f(t)}_{b(t)} = a(t) + ib(t)$$

Пример: $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

Аналитические сигналы

$$f(t) = \underbrace{\operatorname{Re}f(t)}_{a(t)} + i \underbrace{\operatorname{Im}f(t)}_{b(t)} = a(t) + ib(t)$$

Пример: $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

$$\mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t) + ib(t)\} = \mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t)\} + i\mathbb{F}_{\omega < 0} \{b(t)\} = 0$$

Аналитические сигналы

$$f(t) = \underbrace{\operatorname{Re} f(t)}_{a(t)} + i \underbrace{\operatorname{Im} f(t)}_{b(t)} = a(t) + ib(t)$$

Пример: $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

$$\mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t) + ib(t)\} = \mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t)\} + i\mathbb{F}_{\omega < 0} \{b(t)\} = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t)\} = \operatorname{Im} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{b(t)\} \\ \operatorname{Im} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{a(t)\} = -\operatorname{Re} \mathbb{F}_{\omega < 0} \{b(t)\} \end{cases}$$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

$$f(t) = \mathbb{F}^{-1}\{\mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)\}$$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

$$f(t) = \mathbb{F}^{-1}\{\mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)\} = f(t) * \mathbb{F}^{-1}\{\theta(\omega)\}$$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

$$f(t) = \mathbb{F}^{-1}\{\mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)\} = f(t) * \mathbb{F}^{-1}\{\theta(\omega)\} = \frac{1}{2}f(t) * \left(\delta(t) - \frac{1}{\pi it}\right) =$$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{F}^{-1}\{\mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)\} = f(t) * \mathbb{F}^{-1}\{\theta(\omega)\} = \frac{1}{2}f(t) * \left(\delta(t) - \frac{1}{\pi it}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left(\delta(t-t') - \frac{1}{\pi i(t-t')}\right) dt' \end{aligned}$$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{F}^{-1}\{\mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)\} = f(t) * \mathbb{F}^{-1}\{\theta(\omega)\} = \frac{1}{2}f(t) * \left(\delta(t) - \frac{1}{\pi it}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left(\delta(t-t') - \frac{1}{\pi i(t-t')}\right) dt' = \frac{f(t)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' \end{aligned}$$

Преобразование Гильберта

Определение

$f(t)$ — аналитический сигнал; $f(t) = a(t) + ib(t)$

$$\mathbb{F}\{f(t)\} = \mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{F}^{-1}\{\mathbb{F}\{f(t)\} \cdot \theta(\omega)\} = f(t) * \mathbb{F}^{-1}\{\theta(\omega)\} = \frac{1}{2}f(t) * \left(\delta(t) - \frac{1}{\pi it}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left(\delta(t-t') - \frac{1}{\pi i(t-t')}\right) dt' = \frac{f(t)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t')}{t-t'} dt' \equiv \mathbb{H}\{a(t)\} \\ a(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(t')}{t-t'} dt' \equiv \mathbb{H}^{-1}\{b(t)\} \end{cases}$$

Преобразование Гильберта

Свойства

Прямое преобразование

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Преобразование Гильберта

Свойства

Прямое преобразование

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

- **Линейность:** $\mathbb{H}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{H}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{H}\{f_2(t)\}$

Преобразование Гильберта

Свойства

Прямое преобразование

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

- **Линейность:** $\mathbb{H}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{H}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{H}\{f_2(t)\}$

- **Ортогональность:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \cdot f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \cdot f(t')}{t-t'} dt dt' = 0$$

Преобразование Гильберта

Свойства

Прямое преобразование

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

- **Линейность:** $\mathbb{H}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{H}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{H}\{f_2(t)\}$

- **Ортогональность:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \cdot f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \cdot f(t')}{t-t'} dt dt' = 0$$

- **Двукратное преобразование:** $\mathbb{H}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -f(t)$

Преобразование Гильберта

Свойства

Прямое преобразование

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

- **Линейность:** $\mathbb{H}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{H}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{H}\{f_2(t)\}$
- **Ортогональность:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \cdot f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \cdot f(t')}{t-t'} dt dt' = 0$$
- **Двукратное преобразование:** $\mathbb{H}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -f(t)$
- **Связь с преобразованием Фурье:** $\mathbb{F}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \mathbb{F}\{f(t)\}$

Преобразование Гильберта

Свойства

Прямое преобразование

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

- **Линейность:** $\mathbb{H}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{H}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{H}\{f_2(t)\}$
- **Ортогональность:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \cdot f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \cdot f(t')}{t-t'} dt dt' = 0$$
- **Двукратное преобразование:** $\mathbb{H}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -f(t)$
- **Связь с преобразованием Фурье:** $\mathbb{F}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \mathbb{F}\{f(t)\}$
- **Сигнал $f(t) + i\mathbb{H}\{f(t)\}$ является аналитическим**

Преобразование Гильберта

Свойства

Прямое преобразование

$$\mathbb{H}\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

Обратное преобразование

$$\mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt'$$

- **Линейность:** $\mathbb{H}\{\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)\} = \xi_1 \mathbb{H}\{f_1(t)\} + \xi_2 \mathbb{H}\{f_2(t)\}$
- **Ортогональность:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{H}^{-1}\{f(t)\} \cdot f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) \cdot f(t')}{t-t'} dt dt' = 0$$
- **Двукратное преобразование:** $\mathbb{H}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -f(t)$
- **Связь с преобразованием Фурье:** $\mathbb{F}\{\mathbb{H}\{f(t)\}\} = -i \operatorname{sgn}(\omega) \mathbb{F}\{f(t)\}$
- Сигнал $f(t) + i\mathbb{H}\{f(t)\}$ является аналитическим
- Интегрирование ведется по всей временной оси

Принцип причинности

Определение 4.1

Простое условие причинности —
следствие не может предшествовать причине

Принцип причинности

Определение 4.1

Простое условие причинности —
следствие не может предшествовать причине



Принцип причинности

Определение 4.1

Простое условие причинности —
следствие не может предшествовать причине



В каждом конкретном случае «следствие» и «причину» необходимо строго определить, чтобы данный принципом можно было бы воспользоваться.

Принцип причинности

Определение 4.1

Простое условие причинности —
следствие не может предшествовать причине



В каждом конкретном случае «следствие» и «причину» необходимо строго определить, чтобы данным принципом можно было бы воспользоваться.

Определение 4.2

Релятивистское условие причинности — не существует сигналов, распространяющихся быстрее скорости света

Гармонический осциллятор с затуханием

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = f(t)$$

Гармонический осциллятор с затуханием

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Временная зависимость $\sim e^{-i\omega t}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\tilde{x}(\omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega} = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \tilde{f}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{f}(\omega)$$

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - i\gamma$$

Гармонический осциллятор с затуханием

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

Временная зависимость $\sim e^{-i\omega t}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\tilde{x}(\omega) = -\frac{\tilde{f}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega} = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \tilde{f}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{f}(\omega)$$

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - i\gamma$$

$$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) G(t - \tau) d\tau$$

Гармонический осциллятор с затуханием

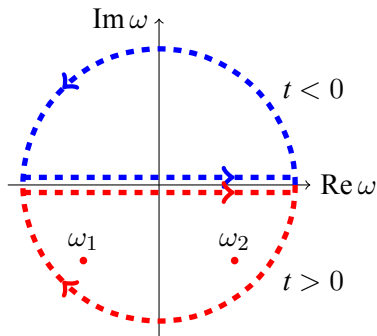
$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Гармонический осциллятор с затуханием

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$



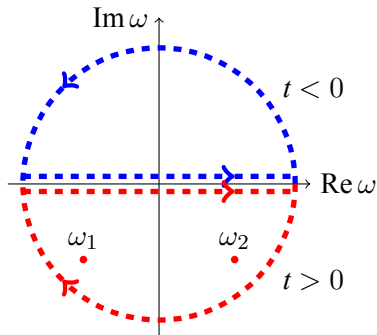
$$G(t > 0) = \exp(-\gamma t) \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$G(t < 0) = 0$$

Гармонический осциллятор с затуханием

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$



$$G(t > 0) = \exp(-\gamma t) \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

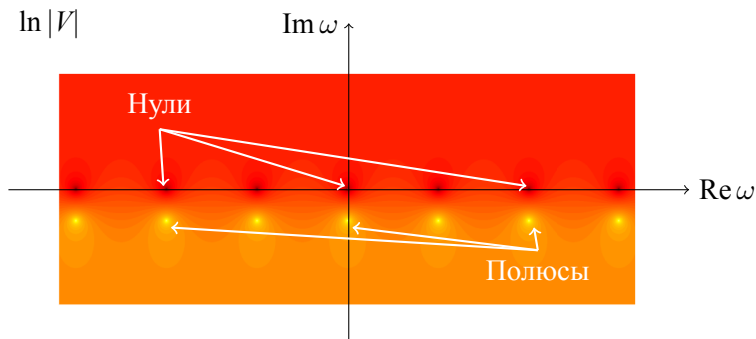
$$G(t < 0) = 0$$

Все полюсы находятся в нижней
полуплоскости I_- !

Отражение волны от плоского слоя

$$V = \frac{Z_2(Z_1 - Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 - Z_1 Z_3) \sin \psi}{Z_2(Z_1 + Z_3) \cos \psi - i(Z_2^2 + Z_1 Z_3) \sin \psi},$$

где $\psi = k_2 d \cos \theta$; θ – угол падения волны;
 $Z_n = \rho_n c_n$ – нормальные импедансы сред



Линейные инвариантные по времени системы

Причинная функция отклика

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика $h(\tau)$:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Линейные инвариантные по времени системы

Причинная функция отклика

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика $h(\tau)$:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

С учетом принципа причинности:

$$g(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \text{ или } h(\tau < 0) \equiv 0$$

Линейные инвариантные по времени системы

Причинная функция отклика

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика $h(\tau)$:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

С учетом принципа причинности:

$$g(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \text{ или } h(\tau < 0) \equiv 0$$

$$\tilde{h}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

Линейные инвариантные по времени системы

Квадратично интегрируемая причинная функция отклика

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(\omega)|^2 d\omega < C$$

Линейные инвариантные по времени системы

Квадратично интегрируемая причинная функция отклика

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(\omega)|^2 d\omega < C$$

Существует $\tilde{h}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \equiv \text{Re} \tilde{h}(\omega) + i \text{Im} \tilde{h}(\omega)$

Линейные инвариантные по времени системы

Квадратично интегрируемая причинная функция отклика

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(\omega)|^2 d\omega < C$$

$$\text{Существует } \tilde{h}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \equiv \text{Re } \tilde{h}(\omega) + i \text{Im } \tilde{h}(\omega)$$

Они связаны преобразованием Гильберта!

$$\begin{cases} \text{Re } \tilde{h}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } \tilde{h}(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \equiv \mathbb{H} \{ \text{Im } \tilde{h}(\omega) \} \\ \text{Im } \tilde{h}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } \tilde{h}(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \equiv \mathbb{H}^{-1} \{ \text{Re } \tilde{h}(\omega) \} \end{cases}$$

Линейные инвариантные по времени системы

Пример: диэлектрическая проницаемость среды

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega)$$

Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига

$$\begin{cases} \varepsilon_r(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \\ \varepsilon_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \end{cases}$$

Практикум

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Огибающая сигнала. Преобразование Гильберта

Jupyter notebook “Огибающая сигнала. Преобразование Гильберта”:
[https://colab.research.google.com/drive/
1eP32NKREB0Y2tSs7ItLBGu1w_1w-g0d7](https://colab.research.google.com/drive/1eP32NKREB0Y2tSs7ItLBGu1w_1w-g0d7)

Лекция 5. Дискретное преобразование Фурье

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Преобразование Фурье

Определение

Прямое преобразование

$$\tilde{f}(\omega) \equiv \mathbb{F} \{f(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

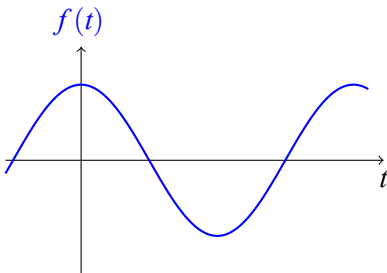
Обратное преобразование

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Что делать, если мы работаем с сигналом в виде отсчетов $f[n]$?

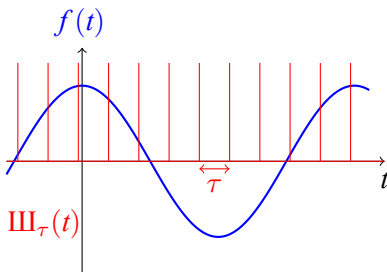
Дискретизация сигнала

$$f(t) \longleftrightarrow f[n] = f(n\tau)$$



Дискретизация сигнала

$$f(t) \longleftrightarrow f[n] = f(n\tau)$$
$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

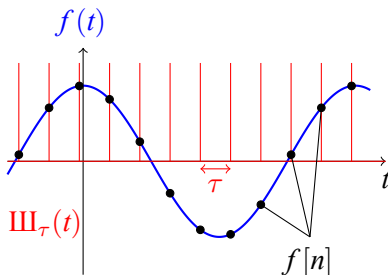


Дискретизация сигнала

$$f(t) \longleftrightarrow f[n] = f(n\tau)$$

$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f_{\text{discr}}(t) = f(t)\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n) f(t)$$



Дискретизация сигнала

Преобразование Фурье

$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f^{\text{discr}}(t) = f(t)\text{Ш}_\tau(t) = f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) = \sum_n f[n]\delta(t - \tau n)$$

Дискретизация сигнала

Преобразование Фурье

$$\mathbb{I}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f_{\text{discr}}(t) = f(t)\mathbb{I}_\tau(t) = f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) = \sum_n f[n]\delta(t - \tau n)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{f_{\text{discr}}}(\omega) &= \mathbb{F} \{f_{\text{discr}}(t)\} = \mathbb{F} \{f(t)\} * \mathbb{F} \{\mathbb{I}_\tau(t)\} = \\ &= \mathbb{F} \{f(t)\} * \mathbb{I}_{2\pi/\tau}(\omega) = \mathbb{F} \{f(t)\} * \left(\sum_n \delta \left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau} \right) \right) = \\ &= \sum_n \mathbb{F}_{\omega - \frac{2\pi n}{\tau}} \{f(t)\} = \sum_n \tilde{f} \left(\omega - \frac{2\pi n}{\tau} \right) \end{aligned}$$

Дискретизация сигнала

Преобразование Фурье

$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f_{\text{discr}}(t) = f(t)\text{Ш}_\tau(t) = f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) = \sum_n f[n]\delta(t - \tau n)$$

$$\mathbb{F} \{f_{\text{discr}}(t)\} = \sum_n \mathbb{F}_{\omega - \frac{2\pi n}{\tau}} \{f(t)\}$$

Спектр дискретизованного сигнала



Дискретизация сигнала

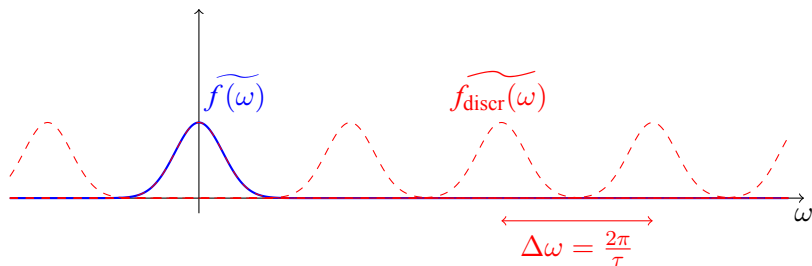
Преобразование Фурье

$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f_{\text{discr}}(t) = f(t)\text{Ш}_\tau(t) = f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) = \sum_n f[n]\delta(t - \tau n)$$

$$\mathbb{F} \{f_{\text{discr}}(t)\} = \sum_n \mathbb{F}_{\omega - \frac{2\pi n}{\tau}} \{f(t)\}$$

Спектр дискретизованного сигнала



Дискретизация сигнала

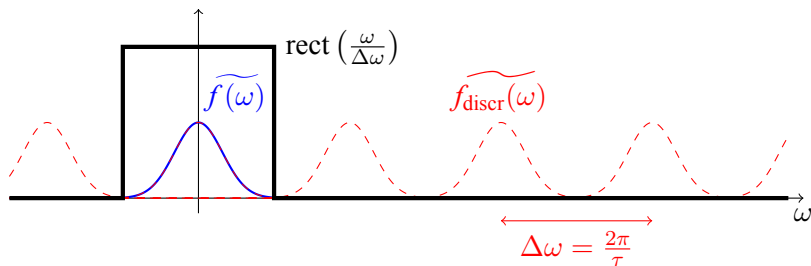
Преобразование Фурье

$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f_{\text{discr}}(t) = f(t)\text{Ш}_\tau(t) = f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) = \sum_n f[n]\delta(t - \tau n)$$

$$\mathbb{F} \{f_{\text{discr}}(t)\} = \sum_n \mathbb{F}_{\omega - \frac{2\pi n}{\tau}} \{f(t)\}$$

Спектр дискретизованного сигнала



Дискретизация сигнала

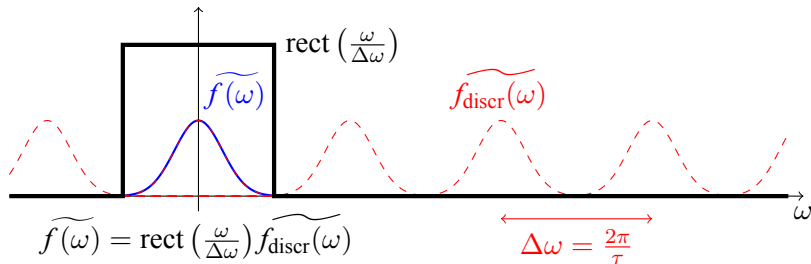
Преобразование Фурье

$$\text{Ш}_\tau(t) = \sum_n \delta(t - \tau n)$$

$$f_{\text{discr}}(t) = f(t)\text{Ш}_\tau(t) = f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) = \sum_n f[n]\delta(t - \tau n)$$

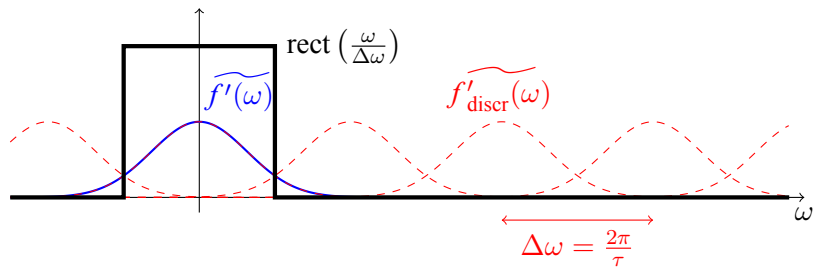
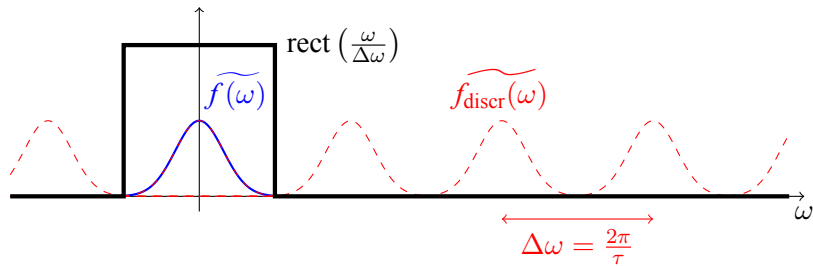
$$\mathbb{F}\{f_{\text{discr}}(t)\} = \sum_n \mathbb{F}_{\omega - \frac{2\pi n}{\tau}}\{f(t)\}$$

Спектр дискретизованного сигнала



Дискретизация сигнала

Преобразование Фурье



Дискретизация сигнала

Частота Найквиста

Определение 5.1

Частота Найквиста — частота, равная половине частоты дискретизации: $f_{Nq} = \frac{1}{2T}$.

Дискретизация сигнала

Частота Найквиста

Определение 5.1

Частота Найквиста — частота, равная половине частоты дискретизации: $f_{Nq} = \frac{1}{2T}$.

Если в спектре сигнала нет частот, выше f_{Nq} , то такой сигнал может быть воспроизведен по своим отсчетам **точно**.

Дискретизация сигнала

Частота Найквиста

Определение 5.1

Частота Найквиста — частота, равная половине частоты дискретизации: $f_{Nq} = \frac{1}{2T}$.

Если в спектре сигнала нет частот, выше f_{Nq} , то такой сигнал может быть воспроизведен по своим отсчетам **точно**.

Значит ли это, что все спектральные компоненты с частотами ниже f_{Nq} воспроизводятся точно?

Дискретизация сигнала

Теорема Котельникова

$$\widetilde{f}(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \widetilde{f}_{\text{discr}}(\omega)$$

Дискретизация сигнала

Теорема Котельникова

$$\widetilde{f(\omega)} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \widetilde{f_{\text{discr}}(\omega)}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \widetilde{f_{\text{discr}}(\omega)} \right\} = \\ &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \right\} * f_{\text{discr}}(t) = \\ &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \right\} * \left(f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) \right) = \\ &= \sum_n f(\tau n) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\tau} t - \pi n\right) \end{aligned}$$

Дискретизация сигнала

Теорема Котельникова

$$\widetilde{f(\omega)} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \widetilde{f_{\text{discr}}(\omega)}$$

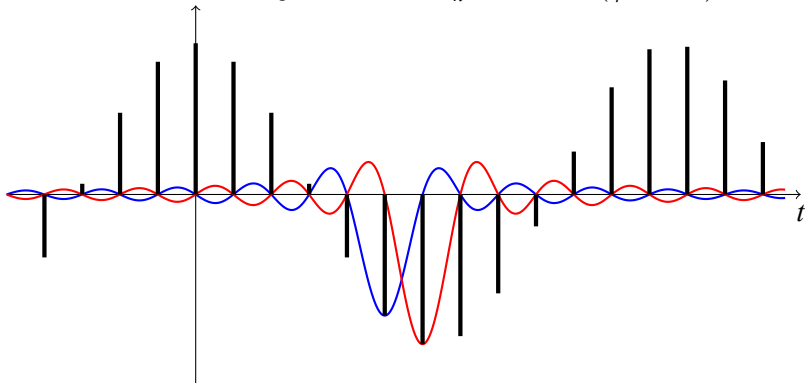
$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \widetilde{f_{\text{discr}}(\omega)} \right\} = \\ &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \right\} * f_{\text{discr}}(t) = \\ &= \mathbb{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right) \right\} * \left(f(t) \sum_n \delta(t - \tau n) \right) = \\ &= \sum_n f(\tau n) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\tau}t - \pi n\right) \end{aligned}$$

Если $f_{\text{max}} \leq f_{Nq}$, то $f(t) = \sum_n f(\tau n) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\tau}t - \pi n\right)$

Дискретизация сигнала

Теорема Котельникова

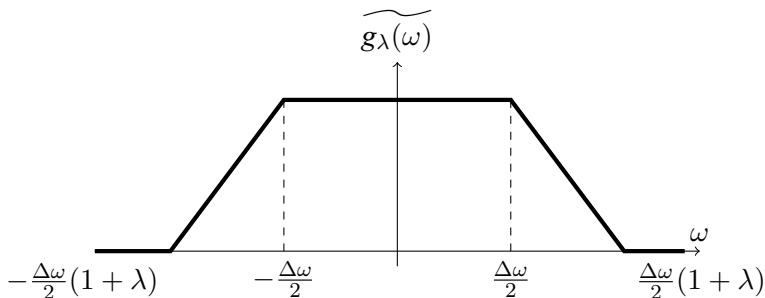
Если $f_{\max} \leq f_{Nq}$, то $f(t) = \sum_n f(\tau n) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\tau}t - \pi n\right)$



Отсчеты дают независимую информацию о сигнале

Дискретизация сигнала

Oversampling



$$\widetilde{g}_\lambda(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \Delta\omega/2; \\ 1 - \frac{|\omega| - \Delta\omega/2}{\lambda\Delta\omega/2} & \Delta\omega/2 \leq |\omega| \leq (1 + \lambda)\Delta\omega/2; \\ 0 & |\omega| \geq (1 + \lambda)\Delta\omega/2 \end{cases}$$

Дискретизация сигнала

Oversampling

$$f(t) = \sum_n f\left(\frac{\pi n}{(1+\lambda)\Delta\omega/2}\right) G_\lambda\left(t - \frac{\pi n}{(1+\lambda)\Delta\omega/2}\right),$$

$$\text{где } G_\lambda(x) = \frac{8 \sin [x(1 + \lambda/2)\Delta\omega/2] \sin [x\lambda\Delta\omega/4]}{\lambda\Delta\omega^2(1 + \lambda)x^2}$$

Дискретизация сигнала

Oversampling

$$f(t) = \sum_n f\left(\frac{\pi n}{(1+\lambda)\Delta\omega/2}\right) G_\lambda\left(t - \frac{\pi n}{(1+\lambda)\Delta\omega/2}\right),$$

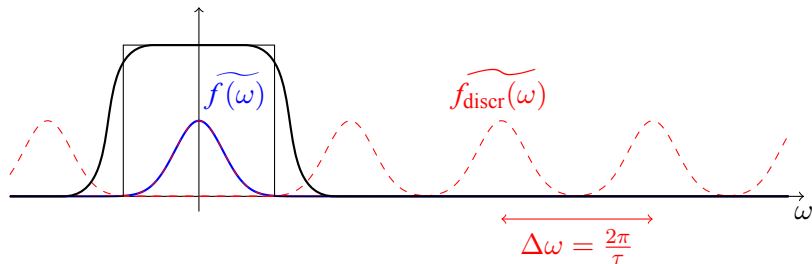
$$\text{где } G_\lambda(x) = \frac{8 \sin [x(1 + \lambda/2)\Delta\omega/2] \sin [x\lambda\Delta\omega/4]}{\lambda\Delta\omega^2(1 + \lambda)x^2}$$

$G_\lambda(x)$ убывает быстрее, чем $\text{sinc}(x)$

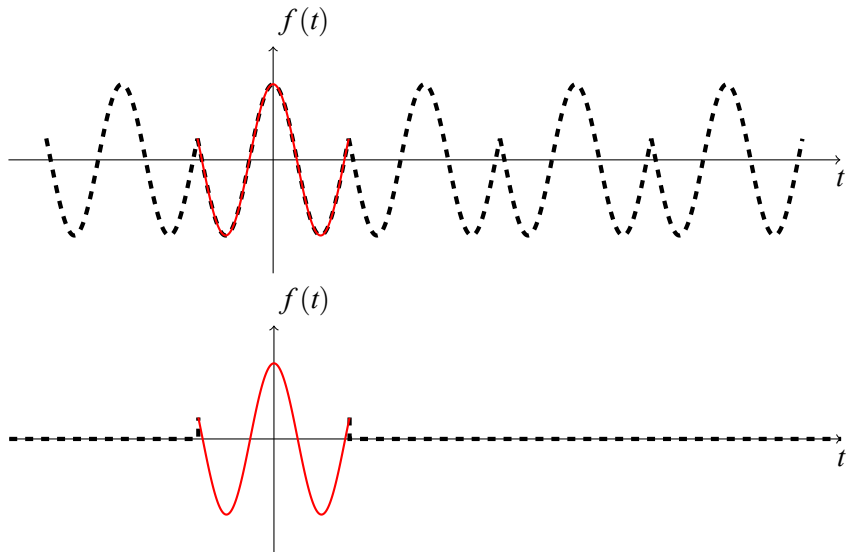
При $\lambda \rightarrow 0$ $G_\lambda(x) \rightarrow \text{sinc}(x)$

Дискретизация сигнала

Oversampling и реальные устройства



Ограниченность сигнала по времени



Лекция 6. Частотно-временные представления СИГНАЛОВ

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

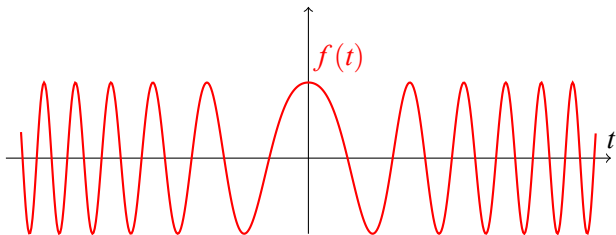
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Частота спектральной компоненты \longleftrightarrow Мгновенная частота

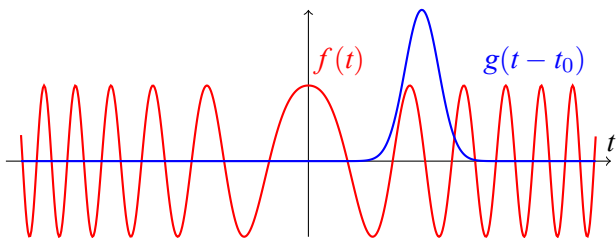
Частота спектральной компоненты \longleftrightarrow Мгновенная частота

Интересно знать зависимость спектра сигнала от времени

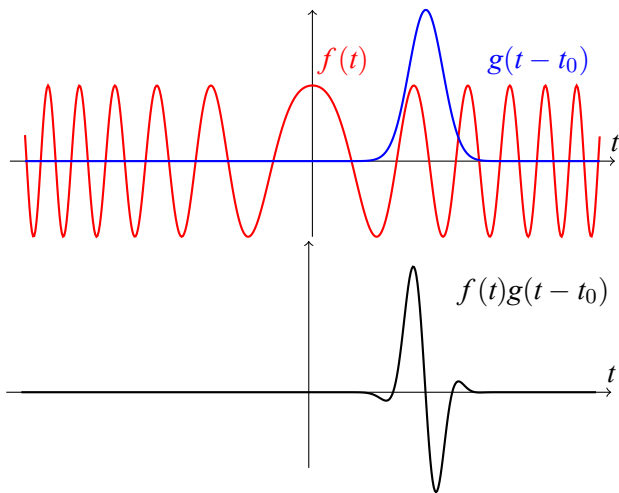
Оконное преобразование Фурье



Оконное преобразование Фурье



Оконное преобразование Фурье



Оконное преобразование Фурье

Определение

$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\} (\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s-t) \exp(-i\omega s) ds$$
$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\} (m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s-nt_0) \exp(-im\omega_0 s) ds$$

Оконное преобразование Фурье

Выбор оконной функции

Функция $g(t)$ должна быть хорошо локализована
как по частоте, так и по времени

Оконное преобразование Фурье

Выбор оконной функции

$$\mathbb{Q}_T f(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq T \\ 0 & |x| > T \end{cases}$$

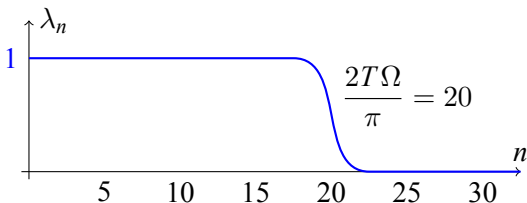
$$\widetilde{\mathbb{P}_\Omega f(x)} = \begin{cases} \widetilde{f(x)} & |x| \leq \Omega \\ 0 & |x| > \Omega \end{cases}$$

Оконное преобразование Фурье

Выбор оконной функции

Оператор $\mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega$ ограничивает сигнал по частоте и по времени

$$\|\mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f\|^2 / \|f\|^2 = \langle \mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f | f \rangle / \|f\|^2$$

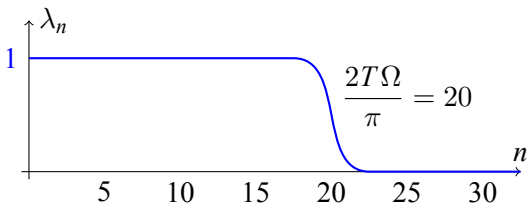


Оконное преобразование Фурье

Выбор оконной функции

Оператор $\mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega$ ограничивает сигнал по частоте и по времени

$$\|\mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f\|^2 / \|f\|^2 = \langle \mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f | f \rangle / \|f\|^2$$



$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists C_\epsilon : \quad \{n; \lambda_n \geq 1 - \epsilon\} \leq \frac{2T\Omega}{\pi} - C_\epsilon \log T\Omega$$

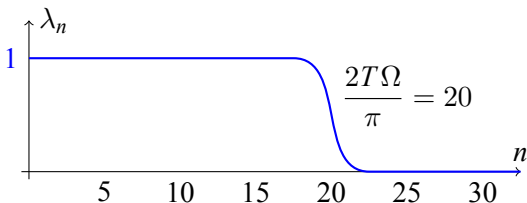
$$\{n; 1 - \epsilon \geq \lambda_n \geq \epsilon\} \leq 2C_\epsilon \log T\Omega$$

Оконное преобразование Фурье

Выбор оконной функции

Оператор $\mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega$ ограничивает сигнал по частоте и по времени

$$\|\mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f\|^2 / \|f\|^2 = \langle \mathbb{Q}_T \mathbb{P}_\Omega \mathbb{Q}_T f | f \rangle / \|f\|^2$$



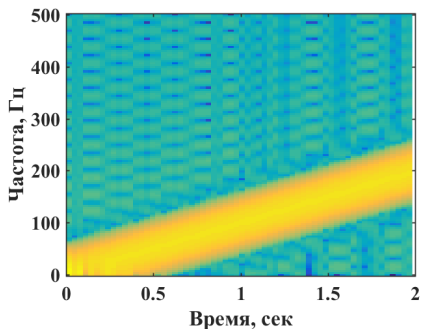
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists C_\epsilon : \quad \{n; \lambda_n \geq 1 - \epsilon\} \leq \frac{2T\Omega}{\pi} - C_\epsilon \log T\Omega$$

$$\{n; 1 - \epsilon \geq \lambda_n \geq \epsilon\} \leq 2C_\epsilon \log T\Omega$$

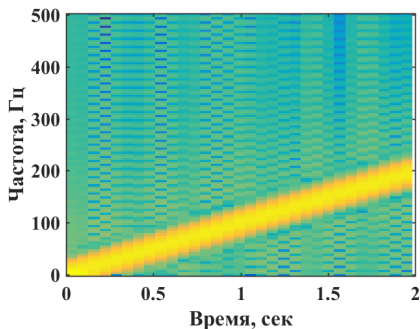
$$\text{При } T\Omega \rightarrow \infty \quad N = \frac{2T \cdot 2\Omega}{2\pi}$$

Оконное преобразование Фурье

Примеры



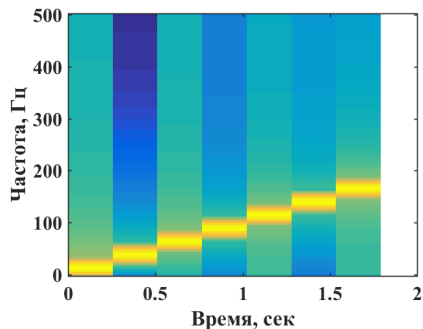
Ширина окна 32, без наложения



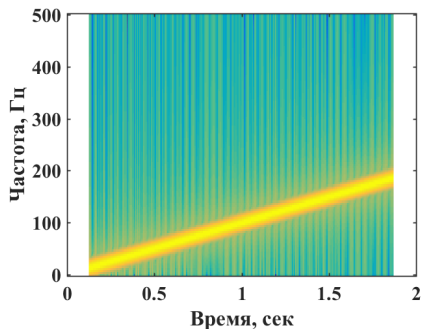
Ширина окна 64, без наложения

Оконное преобразование Фурье

Примеры



Ширина окна 256, без наложения



Ширина окна 256, наложение 250

Вейвлет-преобразование

Определение

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

Вейвлет-преобразование

Определение

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

Определение 6.1

Материнский вейвлет — функция $\psi(s)$, где $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds = 0$.

Вейвлет-преобразование

Определение

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

Определение 6.1

Материнский вейвлет — функция $\psi(s)$, где $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds = 0$.

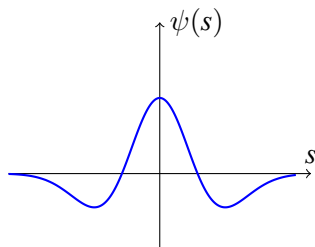
Дискретное вейвлет-преобразование

$$a = a_0^m; \quad b = nb_0 a_0^m, \text{ где } a_0 > 1; b_0 > 0; \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (m, n) = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi (a_0^{-m} t - nb_0) dt$$

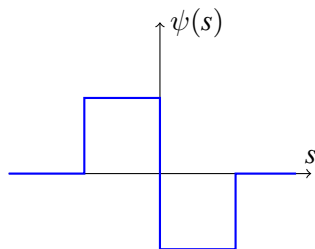
Вейвлет-преобразование

Примеры материнских вейвлетов



Мексиканская шляпа

$$\psi(s) = (1 - s^2) \exp(-s^2/2)$$

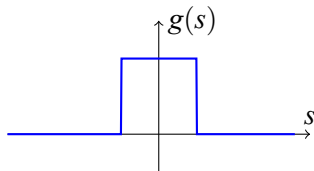


Вейвлет Хаара

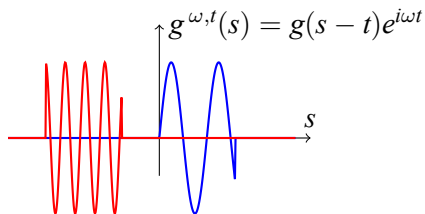
Вейвлет-преобразование

Сравнение с оконным преобразованием Фурье

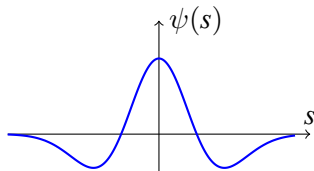
Оконное преобразование Фурье



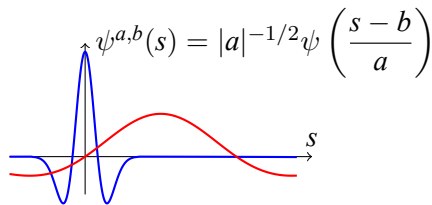
ω – частота, s – смещение



Вейвлет-преобразование

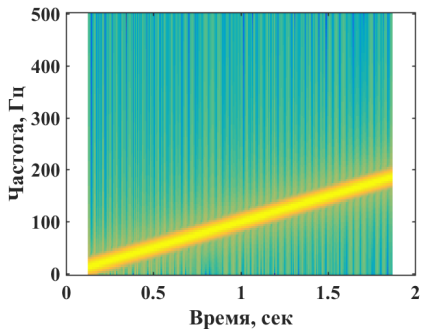


$|a|$ – масштаб, b – смещение

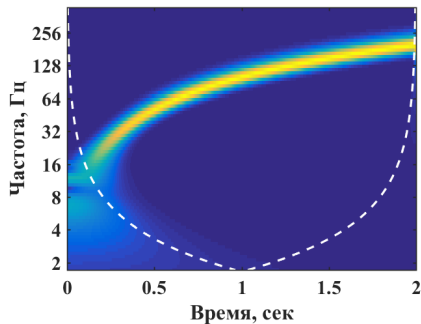


Вейвлет-преобразование

Сравнение с оконным преобразованием Фурье



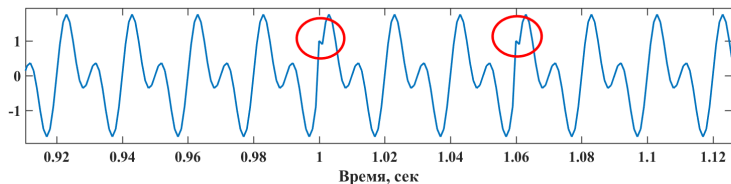
Оконное преобразование, ширина окна 256, наложение 250



Вейвлет-преобразование

Вейвлет-преобразование

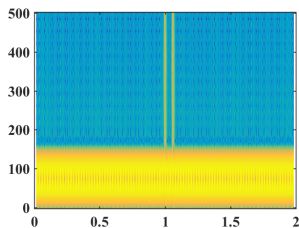
Сравнение с оконным преобразованием Фурье



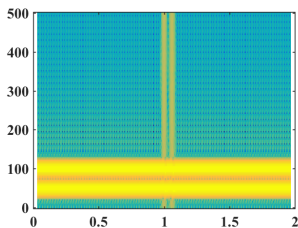
$$f(t) = \sin(2\pi \cdot 50t) + \sin(2\pi \cdot 100t) + \delta(t - 1.00) + \delta(t - 1.06)$$

Вейвлет-преобразование

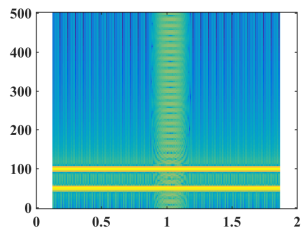
Сравнение с оконным преобразованием Фурье



Ширина окна 32



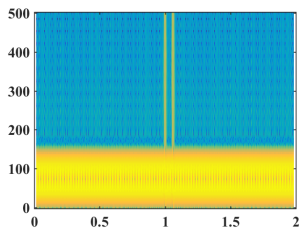
Ширина окна 64



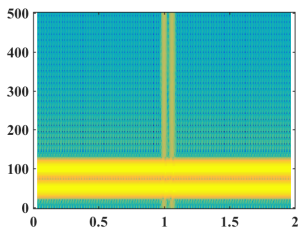
Ширина окна 256

Вейвлет-преобразование

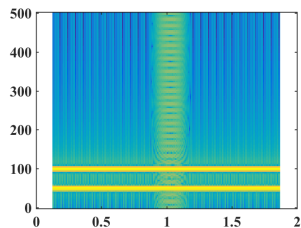
Сравнение с оконным преобразованием Фурье



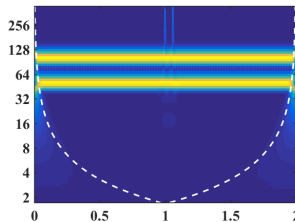
Ширина окна 32



Ширина окна 64



Ширина окна 256



Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\text{Пусть } \psi^{a,b}(s) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{s-b}{a}\right),$$

$$\text{где } C_\psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} < \infty \text{ и } \|\psi\| = 1$$

$$\mathbb{T}_{\text{wl}}\{f\}(a,b) = \langle f; \psi^{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \overline{\psi^{a,b}(s)} ds$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\mathbb{F} \left\{ \psi^{a,b}(s) \right\} = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{s-b}{a} \right) \exp(-is\xi) ds = \sqrt{|a|} \exp(-i\xi b) \widetilde{\psi}(a\xi)$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\mathbb{F} \left\{ \psi^{a,b}(s) \right\} = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{s-b}{a} \right) \exp(-is\xi) ds = \sqrt{|a|} \exp(-i\xi b) \widetilde{\psi}(a\xi)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{ f \} (a,b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f}(\xi) \exp(i\xi s) \overline{\psi^{a,b}(s)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f}(\xi) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} ds \exp(-i\xi s) \psi^{a,b}(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f}(\xi) \overline{\mathbb{F} \{ \psi^{a,b}(s) \}} = \\ &= \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi b) \widetilde{f}(\xi) \overline{\widetilde{\psi}(a\xi)} \end{aligned}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Пусть $f, g \in \mathbb{L}^2$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) \overline{\mathbb{T}_{\text{wl}} \{g\} (a,b)}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) \overline{\mathbb{T}_{\text{wl}} \{g\} (a,b)} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi b) \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-i\xi' b) \overline{\widetilde{g(\xi')}} \widetilde{\psi(a\xi')}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) \overline{\mathbb{T}_{\text{wl}} \{g\} (a,b)} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi b) \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-i\xi' b) \overline{\widetilde{g(\xi')}} \widetilde{\psi(a\xi')} = \\
 & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \overline{\widetilde{g(\xi')}} \widetilde{\psi(a\xi')} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} db \exp(i(\xi - \xi')b)}_{2\pi\delta(\xi - \xi')}
 \end{aligned}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\}(a,b) \overline{\mathbb{T}_{\text{wl}} \{g\}(a,b)} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi b) \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-i\xi' b) \overline{\widetilde{g(\xi')}} \widetilde{\psi(a\xi')} = \\
 & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \overline{\widetilde{g(\xi')}} \widetilde{\psi(a\xi')} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} db \exp(i(\xi - \xi')b)}_{2\pi\delta(\xi - \xi')} = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{g(\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da\xi}{|a\xi|} |\widetilde{\psi(a\xi)}|^2
 \end{aligned}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$\begin{aligned}
 & \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{wl} \{f\} (a,b) \overline{\mathbb{T}_{wl} \{g\} (a,b)} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(i\xi b) \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \times \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \exp(-i\xi' b) \overline{\widetilde{g(\xi')}} \widetilde{\psi(a\xi')} = \\
 & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{\psi(a\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \overline{\widetilde{g(\xi')}} \widetilde{\psi(a\xi')} \int_{-\infty}^{\infty} db \exp(i(\xi - \xi')b) = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{g(\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da\xi}{|a\xi|} |\widetilde{\psi(a\xi)}|^2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widetilde{f(\xi)} \overline{\widetilde{g(\xi)}}}_{\widetilde{\langle f; \widetilde{g} \rangle} = 2\pi \langle f; g \rangle} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{|\xi|} |\widetilde{\psi(\xi)}|^2}_{C_\psi}
 \end{aligned}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Прямое и обратное преобразование

Пусть $f, g \in \mathbb{L}^2$, тогда

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) \overline{\mathbb{T}_{\text{wl}} \{g\} (a,b)} = C_{\psi} \langle f; g \rangle$$

$$\text{где } C_{\psi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} < \infty$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Прямое и обратное преобразование

Пусть $f, g \in \mathbb{L}^2$, тогда

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \langle f; \psi^{a,b} \rangle \langle \psi^{a,b}; g \rangle = C_{\psi} \langle f; g \rangle$$

$$\text{где } C_{\psi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi(\xi)}|^2}{|\xi|} < \infty$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Прямое и обратное преобразование

Пусть $f, g \in \mathbb{L}^2$, тогда

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} \langle f; \psi^{a,b} \rangle \langle \psi^{a,b}; g \rangle = C_{\psi} \langle f; g \rangle$$

$$\text{где } C_{\psi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi(\xi)}|^2}{|\xi|} < \infty$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} f(s) = C_{\psi}^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) \overline{\psi^{a,b}(s)} \\ \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \psi \left(\frac{s-b}{a} \right) ds \end{cases}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Прямое и обратное преобразование

$$\begin{cases} f(s) = C_{\psi}^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) \overline{\psi^{a,b}(s)} \\ \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \psi \left(\frac{s-b}{a} \right) ds \end{cases}$$

$$C_{\psi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi(\xi)}|^2}{|\xi|} < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds = 0, \text{ однако, } \int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds \neq 0$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Прямое и обратное преобразование

$$\lim_{\substack{A_1 \rightarrow 0 \\ A_2, B \rightarrow \infty}} \left\| f(s) - C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} \frac{dad b}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (a, b) \overline{\psi^{a,b}(s)} \right\| = 0$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Прямое и обратное преобразование

$$\lim_{\substack{A_1 \rightarrow 0 \\ A_2, B \rightarrow \infty}} \left\| f(s) - C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} \frac{dad b}{a^2} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\}(a, b) \overline{\psi^{a,b}(s)} \right\| = 0$$

Пример:

$$g_L(x) = \begin{cases} (2L)^{-1} & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g_L(x) dx = 2L \cdot (2L)^{-1} = 1 \\ \|g_L\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_L^2(x) dx = 2L \cdot (2L)^{-2} = (2L)^{-1} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

Разные вейвлеты для разложения и восстановления

$$C_{\psi_1\psi_2} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\widetilde{\psi_1(\xi)}| |\widetilde{\psi_2(\xi)}|}{|\xi|} < \infty$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \langle f; \psi_1^{a,b} \rangle \langle \psi_2^{a,b}; g \rangle = C_{\psi_1\psi_2} \langle f; g \rangle$$

$$f(s) = C_{\psi_1\psi_2}^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dadb}{a^2} \langle f; \psi_1^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b}(s)$$

Оконное преобразование Фурье

Прямое и обратное преобразование

$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s-t) \exp(-i\omega s) ds = \langle f; g^{\omega, t} \rangle$$

$$g^{\omega, t}(s) = g(s-t)e^{i\omega t}$$

$$C_{\text{win}} \equiv \|g\|^2$$

Оконное преобразование Фурье

Прямое и обратное преобразование

$$\mathbb{T}_{\text{win}} \{f\} (\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s-t) \exp(-i\omega s) ds = \langle f; g^{\omega, t} \rangle$$

$$g^{\omega, t}(s) = g(s-t)e^{i\omega t}$$

$$C_{\text{win}} \equiv \|g\|^2$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} d\omega dt \langle f_1; g \rangle \langle g; f_2 \rangle = C_{\text{win}} \langle f_1; f_2 \rangle$$

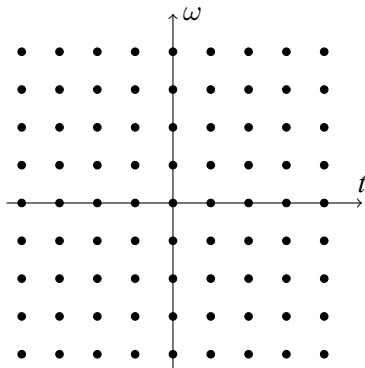
$$f(s) = C_{\text{win}}^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega dt \langle f; g^{\omega, t} \rangle g^{\omega, t}(s)$$

Дискретные преобразования

Частотно-временная плотность

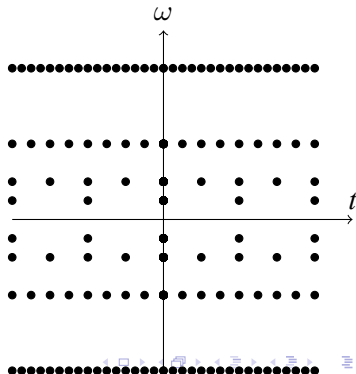
Оконное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\text{win}} \{f\} (m, n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s - nt_0) \exp(-im\omega_0 s) ds \end{aligned}$$



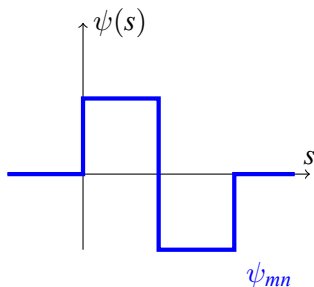
Вейвлет-преобразование

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\text{wl}} \{f\} (m, n) &= \\ &= a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(a_0^{-m}t - nb_0) dt \end{aligned}$$



Дискретные преобразования

Базис Хаара

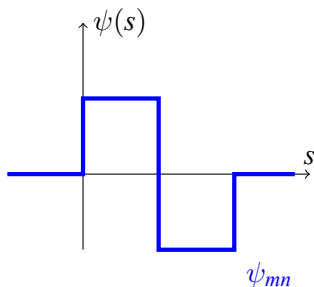


$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 1 & 0 \leq s < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq s < 1 \\ 0 & 1 \leq s \end{cases}$$

$$\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

Дискретные преобразования

Базис Хаара



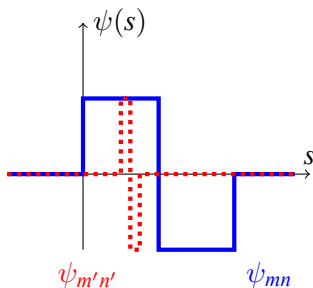
$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 1 & 0 \leq s < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq s < 1 \\ 0 & 1 \leq s \end{cases}$$

$$\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

1) $\text{supp } \psi_{mn} = [2^m n; 2^m(n+1)]$, при равном m вейвлеты не перекрываются

Дискретные преобразования

Базис Хаара



$$\psi(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ 1 & 0 \leq s < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq s < 1 \\ 0 & 1 \leq s \end{cases}$$

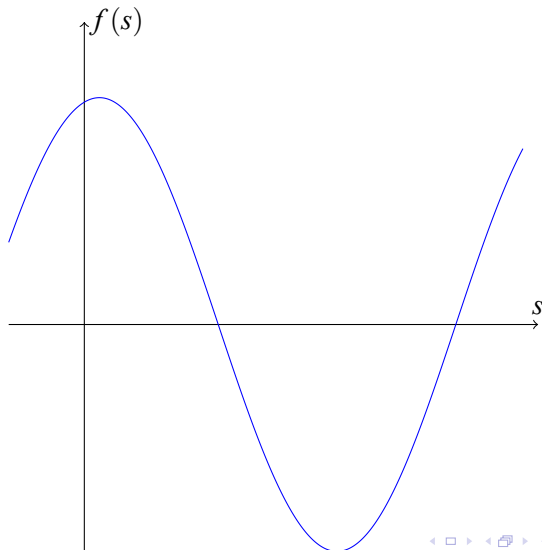
$$\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0)$$

1) $\text{supp } \psi_{mn} = [2^m n; 2^m(n+1)]$, при равном m вейвлеты не перекрываются

2) ψ_{mn} и $\psi_{m'n'}$ перекрываются, но $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{mn}(s) \psi_{m'n'}(s) ds = 0$

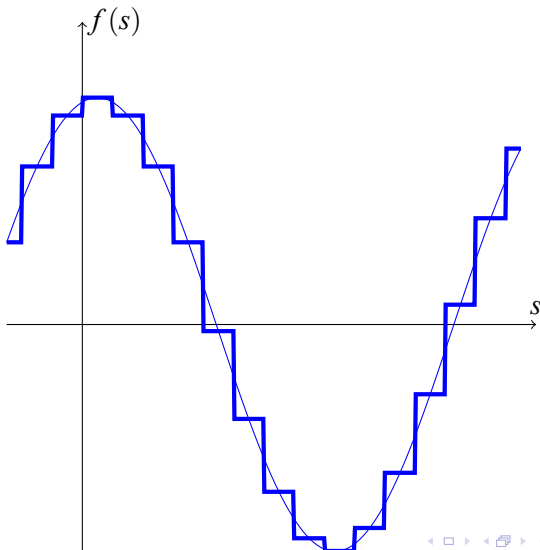
Дискретные преобразования

Базис Хаара



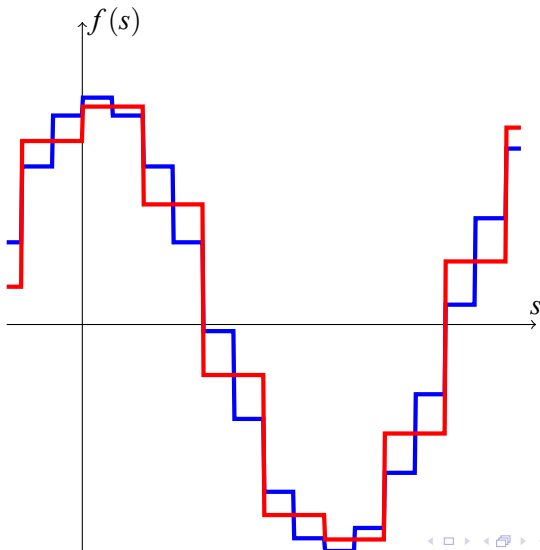
Дискретные преобразования

Базис Хаара



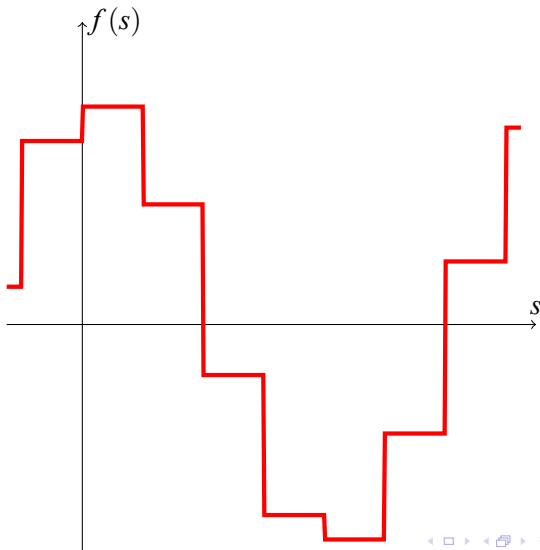
Дискретные преобразования

Базис Хаара



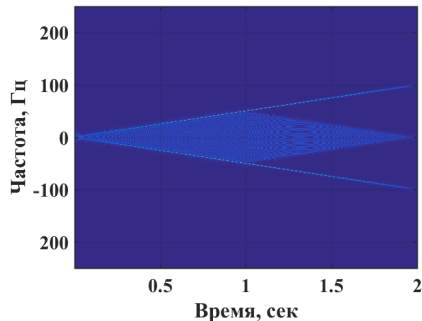
Дискретные преобразования

Базис Хаара

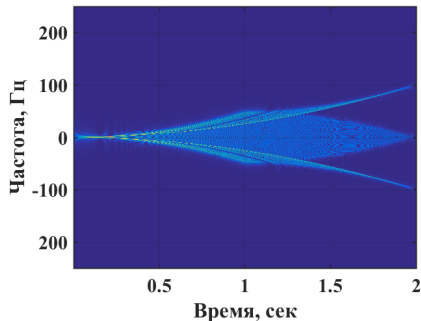


Преобразование Вигнера — Вилля

$$P(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau + t/2) \overline{s(\tau - t/2)} \exp(-i\omega t) dt$$



Линейный ЧМ сигнал

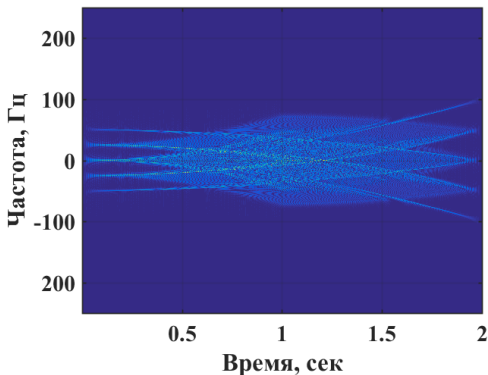


Квадратичный ЧМ сигнал

Преобразование Вигнера — Вилля

Интерференция частотных компонент

$$P(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau + t/2) \overline{s(\tau - t/2)} \exp(-i\omega t) dt$$



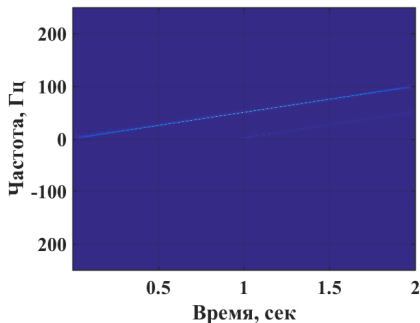
Квадратичные ЧМ сигналы (0–100) Гц и (50–0) Гц

Преобразование Вигнера — Вилля

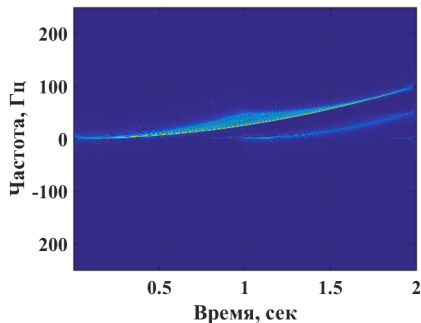
Дополнение до аналитического сигнала

$$s_a(t) = s(t) + i\mathbb{H}\{s(t)\}$$

$$P(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_a(\tau + t/2) \overline{s_a(\tau - t/2)} \exp(-i\omega t) dt$$



Линейный ЧМ сигнал



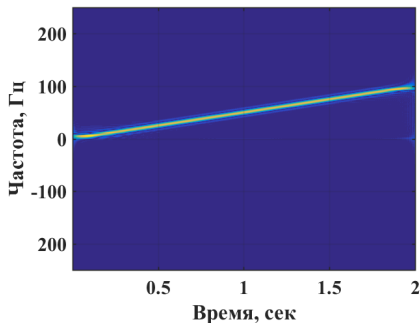
Квадратичный ЧМ сигнал

Преобразование Вигнера — Вилля

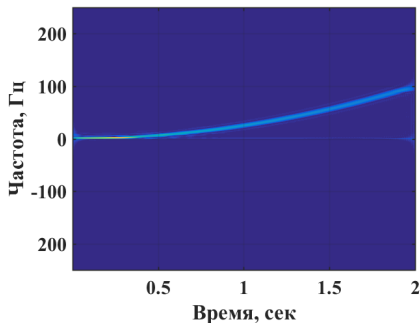
Использование окна во временной области

$$s_a(t) = s(t) + i\mathbb{H}\{s(t)\}$$

$$P(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) s_a(\tau + t/2) \overline{s_a(\tau - t/2)} \exp(-i\omega t) dt$$



Линейный ЧМ сигнал



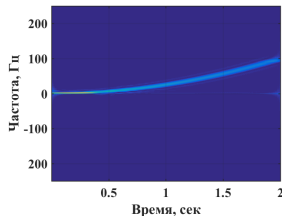
Квадратичный ЧМ сигнал

Преобразование Вигнера — Вилля

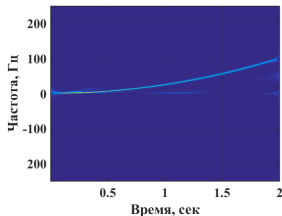
Разные размеры окна

$$s_a(t) = s(t) + i\mathbb{H}\{s(t)\}$$

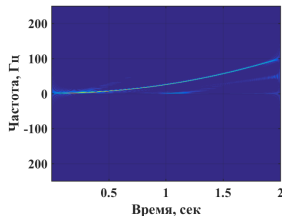
$$P(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) s_a(\tau + t/2) \overline{s_a(\tau - t/2)} \exp(-i\omega t) dt$$



Узкое окно



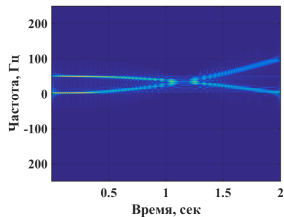
Среднее окно



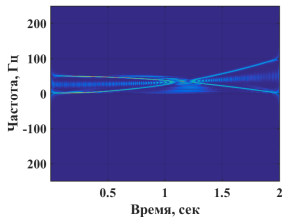
Широкое окно

Преобразование Вигнера — Вилля

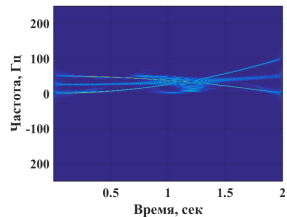
Взаимодействие спектральных компонент



Узкое окно



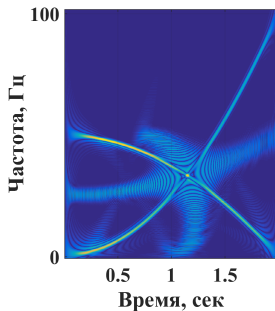
Среднее окно



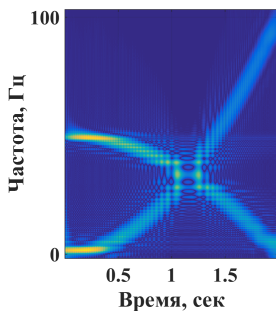
Широкое окно

Преобразование Вигнера — Вилля

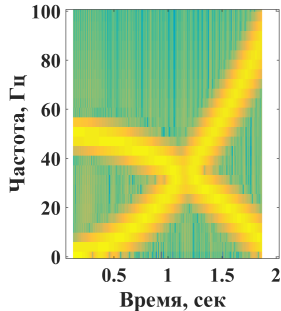
Сравнение с оконным преобразованием Фурье



Широкое окно, ПВВ



Узкое окно, ПВВ



Окно 256, ОПФ

Лекция 7. Фреймы

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Определение

Определение 7.1

Фрейм — множество векторов $\vec{\phi}_j$, таких, что

$$\exists A > 0; B < \infty : \quad \forall \vec{f} \quad A \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$$

A и B — границы фрейма.

Определение 7.2

Жесткий фрейм — фрейм, у которого границы совпадают, т.е.

$$\exists A > 0 : \quad \forall \vec{f} \quad A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

Определение

Определение 7.1

Фрейм — множество векторов $\vec{\phi}_j$, таких, что

$$\exists A > 0; B < \infty : \quad \forall \vec{f} \quad A \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$$

A и B — границы фрейма.

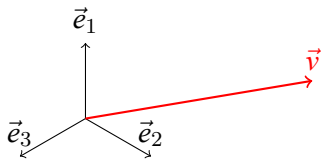
Определение 7.2

Жесткий фрейм — фрейм, у которого границы совпадают, т.е.

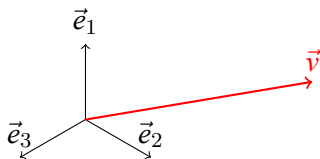
$$\exists A > 0 : \quad \forall \vec{f} \quad A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

Если $A = B = 1$ и $\|\vec{\phi}_j\| = 1$, то фрейм является ортонормированным базисом

Пример фрейма



Пример фрейма



$$\forall \vec{v} = (\vec{v}_1; \vec{v}_2) \quad \sum_j |\langle \vec{v}_j; \vec{e}_j \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|\vec{v}\|^2$$

Это жесткий фрейм;
 $\frac{3}{2}$ – отношение избыточности

Разложение по жесткому фрейму

Тождество поляризации

$$\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + i \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - i \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Разложение по жесткому фрейму

Тождество поляризации

$$\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + i \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - i \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Жесткий фрейм: $A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$

Разложение по жесткому фрейму

Тождество поляризации

$$\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + i \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - i \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Жесткий фрейм: $A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$

$$A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(A \|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - A \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + iA \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - iA \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Разложение по жесткому фрейму

Тождество поляризации

$$\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + i \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - i \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Жесткий фрейм: $A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$

$$\begin{aligned} A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle &= \frac{1}{4} \left(A \|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - A \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + iA \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - iA \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_j \left(\underbrace{|\langle \vec{f} + \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2}_{\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle + \langle \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle} - |\langle \vec{f} - \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 + i |\langle \vec{f} + i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 - i |\langle \vec{f} - i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 \right) \end{aligned}$$

Разложение по жесткому фрейму

Тождество поляризации

$$\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + i \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - i \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Жесткий фрейм: $A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$

$$\begin{aligned} A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle &= \frac{1}{4} \left(A \|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - A \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + iA \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - iA \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_j \left(\underbrace{|\langle \vec{f} + \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2}_{\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle + \langle \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle} - |\langle \vec{f} - \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 + i|\langle \vec{f} + i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 - i|\langle \vec{f} - i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_j (|f_j + g_j|^2 - |f_j - g_j|^2 + i|f_j + ig_j|^2 - i|f_j - ig_j|^2) \end{aligned}$$

Разложение по жесткому фрейму

Тождество поляризации

$$\langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + i \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - i \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right)$$

Жесткий фрейм: $A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$

$$\begin{aligned} A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle &= \frac{1}{4} \left(A \|\vec{f} + \vec{g}\|^2 - A \|\vec{f} - \vec{g}\|^2 + iA \|\vec{f} + i\vec{g}\|^2 - iA \|\vec{f} - i\vec{g}\|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_j \left(\underbrace{|\langle \vec{f} + \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2}_{\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle + \langle \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle} - |\langle \vec{f} - \vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 + i |\langle \vec{f} + i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 - i |\langle \vec{f} - i\vec{g}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_j (|f_j + g_j|^2 - |f_j - g_j|^2 + i |f_j + ig_j|^2 - i |f_j - ig_j|^2) = \\ &= \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle \end{aligned}$$

Разложение по жесткому фрейму

$$\text{Жесткий фрейм: } A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$
$$A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$$

Разложение по жесткому фрейму

$$\text{Жесткий фрейм: } A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

$$A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$$

Пусть \vec{e}_k – базис; $f_k = \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle$; $\vec{f} = \sum_k f_k \vec{e}_k$

Разложение по жесткому фрейму

$$\text{Жесткий фрейм: } A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

$$A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$$

Пусть \vec{e}_k – базис; $f_k = \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle$; $\vec{f} = \sum_k f_k \vec{e}_k$

$$\vec{f} = \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle$$

Разложение по жесткому фрейму

$$\text{Жесткий фрейм: } A \left\| \vec{f} \right\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

$$A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$$

Пусть \vec{e}_k – базис; $f_k = \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle$; $\vec{f} = \sum_k f_k \vec{e}_k$

$$\vec{f} = \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle =$$

$$= \frac{1}{A} \sum_k \vec{e}_k \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{e}_k \rangle$$

Разложение по жесткому фрейму

$$\text{Жесткий фрейм: } A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

$$A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$$

Пусть \vec{e}_k – базис; $f_k = \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle$; $\vec{f} = \sum_k f_k \vec{e}_k$

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \sum_k \vec{e}_k \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{e}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{\phi}_j; \vec{e}_k \rangle \end{aligned}$$

Разложение по жесткому фрейму

Жесткий фрейм: $A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$

$$A \langle \vec{f}; \vec{g} \rangle = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{g} \rangle$$

Пусть \vec{e}_k – базис; $f_k = \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle$; $\vec{f} = \sum_k f_k \vec{e}_k$

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{f}; \vec{e}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \sum_k \vec{e}_k \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \langle \vec{\phi}_j; \vec{e}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \sum_k \vec{e}_k \langle \vec{\phi}_j; \vec{e}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}_j \end{aligned}$$

Разложение по жесткому фрейму

$$A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$
$$\vec{f} = \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}_j$$

Разложение по жесткому фрейму

$$A \|\vec{f}\|^2 = \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2$$

$$\vec{f} = \frac{1}{A} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}_j$$

А что, если фрейм не является жестким?

Фреймовый оператор

Определение

Определение 7.3

Фреймовый оператор — оператор \mathcal{F} , заданный как $(\mathcal{F}\vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$.

Фреймовый оператор

Определение

Определение 7.3

Фреймовый оператор — оператор \mathcal{F} , заданный как $(\mathcal{F}\vec{f})_j = \langle \vec{f}, \vec{\phi}_j \rangle$.

Фреймовый оператор ограничен: $\|\mathcal{F}\vec{f}\|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$

Фреймовый оператор

Определение

Определение 7.3

Фреймовый оператор — оператор \mathcal{F} , заданный как $(\mathcal{F}\vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$.

Фреймовый оператор ограничен: $\|\mathcal{F}\vec{f}\|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$

Определение 7.4

Сопряженный оператор — оператор \mathcal{F}^* , заданный как $\langle \mathcal{F}^*\vec{c}; \vec{f} \rangle = \langle \vec{c}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle$

Фреймовый оператор

Определение

Определение 7.3

Фреймовый оператор — оператор \mathcal{F} , заданный как $(\mathcal{F}\vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$.

Фреймовый оператор ограничен: $\|\mathcal{F}\vec{f}\|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$

Определение 7.4

Сопряженный оператор — оператор \mathcal{F}^* , заданный как $\langle \mathcal{F}^*\vec{c}; \vec{f} \rangle = \langle \vec{c}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle$

$$\langle \mathcal{F}^*\vec{c}; \vec{f} \rangle = \langle \vec{c}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle = \sum_j c_j \overline{\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle}$$

Фреймовый оператор

Определение

Определение 7.3

Фреймовый оператор — оператор \mathcal{F} , заданный как $(\mathcal{F}\vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$.

Фреймовый оператор ограничен: $\|\mathcal{F}\vec{f}\|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$

Определение 7.4

Сопряженный оператор — оператор \mathcal{F}^* , заданный как $\langle \mathcal{F}^*\vec{c}; \vec{f} \rangle = \langle \vec{c}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle$

$$\langle \mathcal{F}^*\vec{c}; \vec{f} \rangle = \langle \vec{c}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle = \sum_j c_j \overline{\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle} = \sum_j c_j \langle \vec{\phi}_j; \vec{f} \rangle$$

Фреймовый оператор

Определение

Определение 7.3

Фреймовый оператор — оператор \mathcal{F} , заданный как $(\mathcal{F}\vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$.

Фреймовый оператор ограничен: $\|\mathcal{F}\vec{f}\|^2 \leq B \|\vec{f}\|^2$

Определение 7.4

Сопряженный оператор — оператор \mathcal{F}^* , заданный как $\langle \mathcal{F}^*\vec{c}; \vec{f} \rangle = \langle \vec{c}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^*\vec{c}; \vec{f} \rangle &= \langle \vec{c}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle = \sum_j c_j \overline{\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle} = \sum_j c_j \langle \vec{\phi}_j; \vec{f} \rangle \\ &\Rightarrow \mathcal{F}^*\vec{c} = \sum_j c_j \vec{\phi}_j \end{aligned}$$

Двойственный фрейм

Определение

$$\sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 = \|\mathcal{F}\vec{f}\|^2 = \langle \mathcal{F}\vec{f}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle = \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F}\vec{f}; \vec{f} \rangle$$

Двойственный фрейм

Определение

$$\begin{aligned}\sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 &= \|\mathcal{F} \vec{f}\|^2 = \langle \mathcal{F} \vec{f}; \mathcal{F} \vec{f} \rangle = \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \\ A \|\vec{f}\|^2 &\leq \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \leq B \|\vec{f}\|^2\end{aligned}$$

Двойственный фрейм

Определение

$$\begin{aligned} \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 &= \|\mathcal{F}\vec{f}\|^2 = \langle \mathcal{F}\vec{f}; \mathcal{F}\vec{f} \rangle = \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F}\vec{f}; \vec{f} \rangle \\ A \|\vec{f}\|^2 &\leq \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F}\vec{f}; \vec{f} \rangle \leq B \|\vec{f}\|^2 \\ A\mathcal{E} &\leq \mathcal{F}^* \mathcal{F} \leq B\mathcal{E} \end{aligned}$$

Двойственный фрейм

Определение

$$\begin{aligned} \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle|^2 &= \|\mathcal{F} \vec{f}\|^2 = \langle \mathcal{F} \vec{f}; \mathcal{F} \vec{f} \rangle = \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \\ A \|\vec{f}\|^2 &\leq \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \leq B \|\vec{f}\|^2 \\ A\mathcal{E} &\leq \mathcal{F}^* \mathcal{F} \leq B\mathcal{E} \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{F}^* \mathcal{F}$ обратим и $B^{-1}\mathcal{E} \leq (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \leq A^{-1}\mathcal{E}$

Двойственный фрейм

Определение

$$\begin{aligned} \sum_j |\langle \vec{f}_j; \vec{\phi}_j \rangle|^2 &= \|\mathcal{F} \vec{f}\|^2 = \langle \mathcal{F} \vec{f}; \mathcal{F} \vec{f} \rangle = \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \\ A \|\vec{f}\|^2 &\leq \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \leq B \|\vec{f}\|^2 \\ A\mathcal{E} &\leq \mathcal{F}^* \mathcal{F} \leq B\mathcal{E} \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{F}^* \mathcal{F}$ обратим и $B^{-1}\mathcal{E} \leq (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \leq A^{-1}\mathcal{E}$

Определение 7.5

Двойственный фрейм — фрейм, образованный векторами

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j.$$

Двойственный фрейм

Определение

$$\begin{aligned} \sum_j |\langle \vec{f}_j; \vec{\phi}_j \rangle|^2 &= \|\mathcal{F} \vec{f}\|^2 = \langle \mathcal{F} \vec{f}; \mathcal{F} \vec{f} \rangle = \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \\ A \|\vec{f}\|^2 &\leq \langle \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f}; \vec{f} \rangle \leq B \|\vec{f}\|^2 \\ A\mathcal{E} &\leq \mathcal{F}^* \mathcal{F} \leq B\mathcal{E} \end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{F}^* \mathcal{F}$ обратим и $B^{-1}\mathcal{E} \leq (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \leq A^{-1}\mathcal{E}$

Определение 7.5

Двойственный фрейм — фрейм, образованный векторами

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j.$$

Двойственный фрейм

Свойства фреймовых операторов

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j$$
$$B^{-1} \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|\vec{f}\|^2$$

Двойственный фрейм

Свойства фреймовых операторов

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j$$

$$B^{-1} \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|\vec{f}\|^2$$

Фреймовый оператор \mathcal{F}' : $(\mathcal{F}' \vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle = \langle \vec{f}; (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j \rangle$

Двойственный фрейм

Свойства фреймовых операторов

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j$$

$$B^{-1} \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|\vec{f}\|^2$$

Фреймовый оператор \mathcal{F}' : $(\mathcal{F}' \vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle = \langle \vec{f}; (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j \rangle$
 $\Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$

Двойственный фрейм

Свойства фреймовых операторов

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j$$

$$B^{-1} \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|\vec{f}\|^2$$

Фреймовый оператор \mathcal{F}' : $(\mathcal{F}' \vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle = \langle \vec{f}; (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j \rangle$

$$\Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F} (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$$

аналогично : $\Rightarrow \mathcal{F}'^* \mathcal{F}' = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$

Двойственный фрейм

Свойства фреймовых операторов

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j$$

$$B^{-1} \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|\vec{f}\|^2$$

Фреймовый оператор \mathcal{F}' : $(\mathcal{F}' \vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle = \langle \vec{f}; (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j \rangle$

$$\Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$$

аналогично : $\Rightarrow \mathcal{F}'^* \mathcal{F}' = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}' \mathcal{F}^* = \mathcal{F} \mathcal{F}'^*$$

Двойственный фрейм

Свойства фреймовых операторов

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j$$

$$B^{-1} \|\vec{f}\|^2 \leq \sum_j |\langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|\vec{f}\|^2$$

Фреймовый оператор \mathcal{F}' : $(\mathcal{F}' \vec{f})_j = \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle = \langle \vec{f}; (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j \rangle$

$$\Rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{F}(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$$

аналогично : $\Rightarrow \mathcal{F}'^* \mathcal{F}' = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}' \mathcal{F}^* = \mathcal{F} \mathcal{F}'^*$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}'^* \mathcal{F} = \mathcal{F}^* \mathcal{F}' = \mathcal{E}$$

Разложение по фрейму и восстановление

$$\mathcal{F}'^* \mathcal{F} = \mathcal{F}^* \mathcal{F}' = \mathcal{E}$$

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}'_j = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle \vec{\phi}_j$$

Разложение и восстановление идет по двойственным друг к другу фреймам

Разложение по фрейму и восстановление

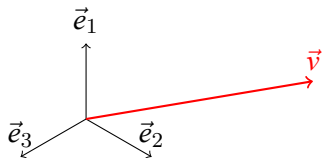
$$\mathcal{F}'^* \mathcal{F} = \mathcal{F}^* \mathcal{F}' = \mathcal{E}$$

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle \vec{\phi}'_j = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{\phi}'_j \rangle \vec{\phi}_j$$

Разложение и восстановление идет по
двойственным друг к другу фреймам

Осталось найти алгоритм определения $\vec{\phi}'_j$ по $\vec{\phi}_j$

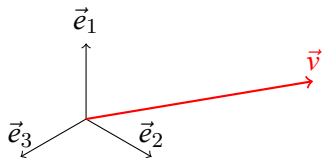
Пример фрейма



$$\vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

$$\vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j (\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle + \alpha) \vec{e}_j$$

Пример фрейма

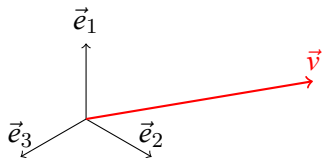


$$\vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

$$\vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j (\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle + \alpha) \vec{e}_j$$

$$\sum_j |\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|\vec{v}\|^2$$

Пример фрейма



$$\vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

$$\vec{v} = \frac{2}{3} \sum_j (\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle + \alpha) \vec{e}_j$$

$$\sum_j |\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\sum_j |\langle \vec{v}; \vec{e}_j \rangle + \alpha|^2 = \frac{3}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + 3\alpha^2 > \frac{3}{2} \|\mathbf{v}\|^2$$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

“Почти жесткий” фрейм

$$A\mathcal{E} \leq \mathcal{F}^* \mathcal{F} \leq B\mathcal{E}$$
$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j$$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

“Почти жесткий” фрейм

$$A\mathcal{E} \leq \mathcal{F}^*\mathcal{F} \leq B\mathcal{E}$$

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^*\mathcal{F})^{-1}\vec{\phi}_j$$

Если $r = B/A - 1 \ll 1$, то $\mathcal{F}^*\mathcal{F} \approx \frac{A+B}{2}\mathcal{E}$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

“Почти жесткий” фрейм

$$A\mathcal{E} \leq \mathcal{F}^*\mathcal{F} \leq B\mathcal{E}$$

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^*\mathcal{F})^{-1}\vec{\phi}_j$$

Если $r = B/A - 1 \ll 1$, то $\mathcal{F}^*\mathcal{F} \approx \frac{A+B}{2}\mathcal{E}$

$$(\mathcal{F}^*\mathcal{F})^{-1} \approx \frac{2}{A+B}\mathcal{E}; \quad \Rightarrow \quad \vec{\phi}'_j \approx \frac{2}{A+B}\vec{\phi}_j$$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

“Почти жесткий” фрейм

$$A\mathcal{E} \leq \mathcal{F}^*\mathcal{F} \leq B\mathcal{E}$$

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^*\mathcal{F})^{-1}\vec{\phi}_j$$

Если $r = B/A - 1 \ll 1$, то $\mathcal{F}^*\mathcal{F} \approx \frac{A+B}{2}\mathcal{E}$

$$(\mathcal{F}^*\mathcal{F})^{-1} \approx \frac{2}{A+B}\mathcal{E}; \quad \Rightarrow \quad \vec{\phi}'_j \approx \frac{2}{A+B}\vec{\phi}_j$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{E} - \frac{2}{A+B}\mathcal{F}^*\mathcal{F} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{B-A}{B+A}\mathcal{E} \leq \mathcal{R} \leq \frac{B-A}{B+A}\mathcal{E}$$

$$\|\mathcal{R}\| \leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{2+r} \rightarrow 0$$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

Не жесткий фрейм

Что делать, если r не мало?

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

Не жесткий фрейм

Что делать, если r не мало?

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} = \frac{A+B}{2} (\mathcal{E} - \mathcal{R}) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} = \frac{2}{A+B} (\mathcal{E} - \mathcal{R})^{-1}$$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

Не жесткий фрейм

Что делать, если r не мало?

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} = \frac{A+B}{2} (\mathcal{E} - \mathcal{R}) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} = \frac{2}{A+B} (\mathcal{E} - \mathcal{R})^{-1}$$

$$\text{Но } \|\mathcal{R}\| \leq \frac{B-A}{B+A} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ряд } (\mathcal{E} - \mathcal{R})^{-1} = \sum_0^{\infty} \mathcal{R}^k \text{ сходится!}$$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

Не жесткий фрейм

Что делать, если r не мало?

$$\mathcal{F}^* \mathcal{F} = \frac{A+B}{2} (\mathcal{E} - \mathcal{R}) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} = \frac{2}{A+B} (\mathcal{E} - \mathcal{R})^{-1}$$

Но $\|\mathcal{R}\| \leq \frac{B-A}{B+A} < 1 \quad \Rightarrow \quad$ ряд $(\mathcal{E} - \mathcal{R})^{-1} = \sum_0^{\infty} \mathcal{R}^k$ сходится!

$$\vec{\phi}'_j = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \vec{\phi}_j = \frac{2}{A+B} \sum_0^{\infty} \mathcal{R}^k \vec{\phi}_j$$

Определение $\vec{\phi}'$ по $\vec{\phi}$

Итерационное определение

$$\vec{\phi}'_j = \frac{2}{A+B} \sum_0^{\infty} \mathcal{R}^k \vec{\phi}_j$$

$$\vec{\phi}'_j{}^N = \frac{2}{A+B} \sum_0^N \mathcal{R}^k \vec{\phi}_j = \vec{\phi}'_j - \frac{2}{A+B} \sum_{N+1}^{\infty} \mathcal{R}^k \vec{\phi}_j$$

$$\vec{\phi}'_j{}^N = \frac{2}{A+B} \vec{\phi}_j + \mathcal{R} \vec{\phi}'_j{}^{N-1}$$

Фреймы и вейвлеты

- $\vec{\phi}_j$ – это вейвлеты $\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$

Фреймы и вейвлеты

- $\vec{\phi}_j$ – это вейвлеты $\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$

Фреймы и вейвлеты

- $\vec{\phi}_j$ – это вейвлеты $\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если ψ_{mn} образуют фрейм, то ψ – допустимая функция

Фреймы и вейвлеты

- $\vec{\phi}_j$ – это вейвлеты $\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если ψ_{mn} образуют фрейм, то ψ – допустимая функция
- Важно отношение границ фрейма

Фреймы и вейвлеты

- $\vec{\phi}_j$ – это вейвлеты $\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если ψ_{mn} образуют фрейм, то ψ – допустимая функция
- Важно отношение границ фрейма
- ψ_{mn} не при всех $\{\psi; a_0; b_0\}$ образуют фрейм, для этого нужно выполнить условия на убывание функции ψ по частоте и времени

Фреймы и вейвлеты

- $\vec{\phi}_j$ – это вейвлеты $\psi_{mn} = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если ψ_{mn} образуют фрейм, то ψ – допустимая функция
- Важно отношение границ фрейма
- ψ_{mn} не при всех $\{\psi; a_0; b_0\}$ образуют фрейм, для этого нужно выполнить условия на убывание функции ψ по частоте и времени
- Но для многих ψ это так, причем $a \neq 1$ и $b \neq 0$!

Двойственные фреймы для вейвлетов

$$\psi'_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \psi_{mn}, \text{ где } \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f} = \sum_{mn} \langle f; \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}$$

$$f = \sum_j \langle f; \psi_{mn} \rangle \psi'_{mn} = \sum_j \langle f; \psi'_{mn} \rangle \psi_{mn}$$

Надо знать бесконечное число ψ'_{mn} !

Двойственные фреймы для вейвлетов

Операторы \mathcal{D} и \mathcal{T}

Оператор $(\mathcal{D}^m f)(x) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m} x)$

Оператор $(\mathcal{T}^n f)(x) = f(x - nb_0)$

Двойственные фреймы для вейвлетов

Операторы \mathcal{D} и \mathcal{T}

Оператор $(\mathcal{D}^m f)(x) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m} x)$

Оператор $(\mathcal{T}^n f)(x) = f(x - nb_0)$

$\mathcal{F}^* \mathcal{F} \mathcal{D}^m f = \mathcal{D}^m \mathcal{F}^* \mathcal{F} f \Rightarrow$ операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{D}^m перестановочны

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{T}^n не перестановочны

Двойственные фреймы для вейвлетов

Операторы \mathcal{D} и \mathcal{T}

Оператор $(\mathcal{D}^m f)(x) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m}x)$

Оператор $(\mathcal{T}^n f)(x) = f(x - nb_0)$

$\mathcal{F}^* \mathcal{F} \mathcal{D}^m f = \mathcal{D}^m \mathcal{F}^* \mathcal{F} f \Rightarrow$ операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{D}^m перестановочны

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{T}^n не перестановочны

$$\begin{aligned} \psi'_{mn} &= (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \psi_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{D}^m \mathcal{T}^n \psi = \\ &= \mathcal{D}^m (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{T}^n \psi = a_0^{-m/2} \psi'_{0n}(a_0^{-m}x) \end{aligned}$$

Двойственные фреймы для вейвлетов

Операторы \mathcal{D} и \mathcal{T}

Оператор $(\mathcal{D}^m f)(x) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m}x)$

Оператор $(\mathcal{T}^n f)(x) = f(x - nb_0)$

$\mathcal{F}^* \mathcal{F} \mathcal{D}^m f = \mathcal{D}^m \mathcal{F}^* \mathcal{F} f \Rightarrow$ операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{D}^m перестановочны

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{T}^n не перестановочны

$$\begin{aligned} \psi'_{mn} &= (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \psi_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{D}^m \mathcal{T}^n \psi = \\ &= \mathcal{D}^m (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{T}^n \psi = a_0^{-m/2} \psi'_{0n}(a_0^{-m}x) \end{aligned}$$

Всё равно надо знать бесконечное число ψ'_{0n} !

Двойственные фреймы для вейвлетов

Операторы \mathcal{D} и \mathcal{T}

Оператор $(\mathcal{D}^m f)(x) = a_0^{-m/2} f(a_0^{-m} x)$

Оператор $(\mathcal{T}^n f)(x) = f(x - nb_0)$

$\mathcal{F}^* \mathcal{F} \mathcal{D}^m f = \mathcal{D}^m \mathcal{F}^* \mathcal{F} f \Rightarrow$ операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{D}^m перестановочны

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{T}^n не перестановочны

$$\begin{aligned} \psi'_{mn} &= (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \psi_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{D}^m \mathcal{T}^n \psi = \\ &= \mathcal{D}^m (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{T}^n \psi = a_0^{-m/2} \psi'_{0n}(a_0^{-m} x) \end{aligned}$$

Всё равно надо знать бесконечное число ψ'_{0n} !

Поэтому необходимо работать с фреймами, близкими к жестким.

“Многоголосые” вейвлеты

Удобно положить $a_0 = 2$, но это может противоречить условию $B/A - 1 \ll 1$

“Многоголосые” вейвлеты

Удобно положить $a_0 = 2$, но это может противоречить условию $B/A - 1 \ll 1$

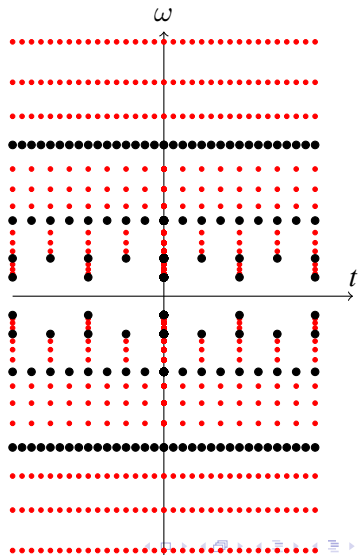
Решение – использовать вейвлеты

$$\psi^\nu(x) = 2^{-(\nu-1)/N} \psi(2^{-(\nu-1)/N} x)$$

“Многоголосые” вейвлеты

Удобно положить $a_0 = 2$, но это может противоречить условию $B/A - 1 \ll 1$

Решение – использовать вейвлеты $\psi^\nu(x) = 2^{-(\nu-1)/N} \psi(2^{-(\nu-1)/N} x)$



“Многоголосые” вейвлеты

Границы фреймов вейвлетов, полученных из функции

$$\psi(x) = 2/\sqrt{3}\pi^{-1/4}(1 - x^2) \exp(-x^2/2) \text{ при } a_0 = 2$$

$N = 1$

b_0	A	B	B/A
0.25	13.091	14.183	1.083
0.50	6.546	7.092	1.083
0.75	4.364	4.728	1.083
1.00	3.223	3.596	1.116
1.25	2.001	3.454	1.726
1.50	0.325	4.221	12.986

$N = 2$

b_0	A	B	B/A
0.25	27.273	27.278	1.0002
0.50	13.673	13.676	1.0002
0.75	9.091	9.093	1.0002
1.00	6.768	6.870	1.015
1.25	4.834	6.077	1.257
1.50	2.609	6.483	2.485
1.75	0.517	7.276	14.061

$N = 3$

b_0	A	B	B/A
0.25	40.914	40.914	1.0000
0.50	20.457	20.457	1.0000
0.75	13.638	13.638	1.0000
1.00	10.178	10.279	1.010
1.25	7.530	8.835	1.173
1.50	4.629	9.009	1.947
1.75	1.747	9.942	5.691

$N = 4$

b_0	A	B	B/A
0.25	54.552	54.552	1.0000
0.50	27.276	27.276	1.0000
0.75	18.184	18.184	1.0000
1.00	13.586	13.690	1.007
1.25	10.205	11.616	1.138
1.50	6.594	11.590	1.758
1.75	2.928	12.659	4.324

[Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. 464 с.]

Фреймы и оконное преобразование Фурье

- $\vec{\phi}_j$ – это функции $g_{mn} = \exp(im\omega_0x)g(x - nt_0)$

Фреймы и оконное преобразование Фурье

- $\vec{\phi}_j$ – это функции $g_{mn} = \exp(im\omega_0x)g(x - nt_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$

Фреймы и оконное преобразование Фурье

- $\vec{\phi}_j$ – это функции $g_{mn} = \exp(im\omega_0x)g(x - nt_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если g_{mn} образуют фрейм, то g – допустимая функция

Фреймы и оконное преобразование Фурье

- $\vec{\phi}_j$ – это функции $g_{mn} = \exp(im\omega_0x)g(x - nt_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если g_{mn} образуют фрейм, то g – допустимая функция
- Важно отношение границ фрейма

Фреймы и оконное преобразование Фурье

- $\vec{\phi}_j$ – это функции $g_{mn} = \exp(im\omega_0x)g(x - nt_0)$
- Есть алгоритм восстановления \vec{f} по разложению $\langle \vec{f}; \vec{\phi}_j \rangle$
- Если g_{mn} образуют фрейм, то g – допустимая функция
- Важно отношение границ фрейма
- g_{mn} не при всех $\{g; \omega_0; t_0\}$ образуют фрейм, для этого нужно выполнить некоторые условия

Фреймы и оконное преобразование Фурье

Оценка для границ фрейма: $A \leq \frac{2\pi}{\omega_0 t_0} \|g\|^2 \leq B$

- Жесткий фрейм при выборе $\|g\| = 1$ имеет границу $A = \frac{2\pi}{\omega_0 t_0}$

Фреймы и оконное преобразование Фурье

Оценка для границ фрейма: $A \leq \frac{2\pi}{\omega_0 t_0} \|g\|^2 \leq B$

- Жесткий фрейм при выборе $\|g\| = 1$ имеет границу $A = \frac{2\pi}{\omega_0 t_0}$
- Если при этом $\omega_0 t_0 = 2\pi$, то фрейм – ортонормированный базис

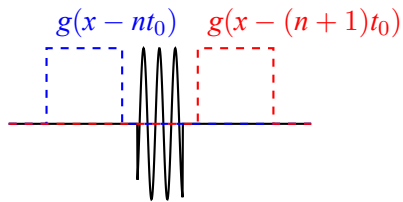
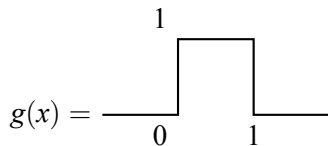
Фреймы и оконное преобразование Фурье

Оценка для границ фрейма: $A \leq \frac{2\pi}{\omega_0 t_0} \|g\|^2 \leq B$

- Жесткий фрейм при выборе $\|g\| = 1$ имеет границу $A = \frac{2\pi}{\omega_0 t_0}$
- Если при этом $\omega_0 t_0 = 2\pi$, то фрейм – ортонормированный базис
- $\omega_0; t_0$ не могут быть произвольны:
при $\omega_0 t_0 > 2\pi \quad \forall g \quad \exists f \neq 0 : \langle f; g_{mn} \rangle = 0$

Фреймы и оконное преобразование Фурье

Достаточное условие существования фрейма



$$\langle f; g_{mn} \rangle = 0$$

Фреймы и оконное преобразование Фурье

Достаточное условие существования фрейма

$$\text{Если } \begin{cases} \inf_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)|^2 > 0 \\ \sup_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)|^2 < \infty \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\beta(s) = \sup_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)| |g(x - nt_0 + s)|$$

убывает по крайней мере как $(1 + |s|)^{-1-\epsilon}$; $\epsilon > 0$,

то $\exists \omega_{\text{threshold}} : \forall \omega_0 < \omega_{\text{threshold}} \quad g_{mn}(x) = \exp(i\omega_0 x) g(x - nt_0)$ – фрейм

Фреймы и оконное преобразование Фурье

Достаточное условие существования фрейма

$$\text{Если } \begin{cases} \inf_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)|^2 > 0 \\ \sup_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)|^2 < \infty \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\beta(s) = \sup_{0 \leq x \leq t_0} \sum_n |g(x - nt_0)| |g(x - nt_0 + s)|$$

убывает по крайней мере как $(1 + |s|)^{-1-\epsilon}$; $\epsilon > 0$,

то $\exists \omega_{\text{threshold}} : \forall \omega_0 < \omega_{\text{threshold}} \quad g_{mn}(x) = \exp(i\omega_0 x) g(x - nt_0)$ – фрейм

Например, если $|g(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\gamma}$; $\gamma > 1$

Двойственные фреймы для оконного преобразования

Фурье

Операторы \mathcal{W} и \mathcal{T}

$$g'_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g_{mn}, \text{ где } \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f} = \sum_{mn} \langle f; g_{mn} \rangle g_{mn}$$

Двойственные фреймы для оконного преобразования

Фурье

Операторы \mathcal{W} и \mathcal{T}

$$g'_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g_{mn}, \text{ где } \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f} = \sum_{mn} \langle f; g_{mn} \rangle g_{mn}$$

Оператор $(\mathcal{T} f)(x) = f(x - t_0)$

Оператор $(\mathcal{W} f)(x) = \exp(i\omega_0 x) f(x)$

Двойственные фреймы для оконного преобразования

Фурье

Операторы \mathcal{W} и \mathcal{T}

$$g'_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g_{mn}, \text{ где } \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f} = \sum_{mn} \langle f; g_{mn} \rangle g_{mn}$$

Оператор $(\mathcal{T} f)(x) = f(x - t_0)$

Оператор $(\mathcal{W} f)(x) = \exp(i\omega_0 x) f(x)$

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{T} перестановочны

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{W} перестановочны

Двойственные фреймы для оконного преобразования Фурье

Операторы \mathcal{W} и \mathcal{T}

$$g'_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g_{mn}, \text{ где } \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f} = \sum_{mn} \langle f; g_{mn} \rangle g_{mn}$$

$$\text{Оператор } (\mathcal{T} f)(x) = f(x - t_0)$$

$$\text{Оператор } (\mathcal{W} f)(x) = \exp(i\omega_0 x) f(x)$$

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{T} перестановочны

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{W} перестановочны

$$\begin{aligned} g'_{mn} &= (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{W}^m \mathcal{T}^n g = \\ &= \mathcal{W}^m \mathcal{T}^n (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g = \exp(im\omega_0 x) g'(x - nt_0) \end{aligned}$$

Двойственные фреймы для оконного преобразования Фурье

Операторы \mathcal{W} и \mathcal{T}

$$g'_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g_{mn}, \text{ где } \mathcal{F}^* \mathcal{F} \vec{f} = \sum_{mn} \langle f; g_{mn} \rangle g_{mn}$$

$$\text{Оператор } (\mathcal{T} f)(x) = f(x - t_0)$$

$$\text{Оператор } (\mathcal{W} f)(x) = \exp(i\omega_0 x) f(x)$$

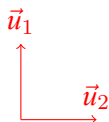
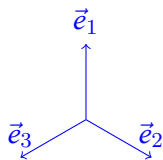
Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{T} перестановочны

Операторы $(\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1}$ и \mathcal{W} перестановочны

$$\begin{aligned} g'_{mn} &= (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g_{mn} = (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} \mathcal{W}^m \mathcal{T}^n g = \\ &= \mathcal{W}^m \mathcal{T}^n (\mathcal{F}^* \mathcal{F})^{-1} g = \exp(im\omega_0 x) g'(x - nt_0) \end{aligned}$$

Для оконного преобразования Фурье условие $B/A - 1 \ll 1$ не важно!

Избыточность фреймов



$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{u}_1 \\ \vec{e}_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 \\ \vec{e}_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 \end{aligned}$$

$\{\vec{u}_1; \vec{u}_2\}$ – ортонормированный базис

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ – жесткий фрейм с границами $\frac{3}{2}$

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j$$

$$\vec{f} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

Избыточность фреймов

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}, \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j$$

$$\vec{f} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{f}, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

Избыточность фреймов

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j$$

$$\vec{f} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

\mathcal{M} – операция математического ожидания

Пусть α_j – независимые случайные величины; $\mathcal{M}\alpha_j = 0$; $\mathcal{M}\alpha_j^2 = 1$

Избыточность фреймов

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j$$

$$\vec{f} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

\mathcal{M} – операция математического ожидания

Пусть α_j – независимые случайные величины; $\mathcal{M}\alpha_j = 0$; $\mathcal{M}\alpha_j^2 = 1$

$$\mathcal{M} \left\| \vec{f} - \sum_j (\langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle + \alpha_j \epsilon) \vec{u}_j \right\|^2 = \epsilon^2 \mathcal{M} \left\| \sum_j \alpha_j \vec{u}_j \right\|^2 = \epsilon^2 \mathcal{M}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 2\epsilon^2$$

Избыточность фреймов

$$\vec{f} = \sum_j \langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j$$

$$\vec{f} = \frac{2}{3} \sum_j \langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

\mathcal{M} – операция математического ожидания

Пусть α_j – независимые случайные величины; $\mathcal{M}\alpha_j = 0$; $\mathcal{M}\alpha_j^2 = 1$

$$\mathcal{M} \left\| \vec{f} - \sum_j (\langle \vec{f}; \vec{u}_j \rangle + \alpha_j \epsilon) \vec{u}_j \right\|^2 = \epsilon^2 \mathcal{M} \left\| \sum_j \alpha_j \vec{u}_j \right\|^2 = \epsilon^2 \mathcal{M}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 2\epsilon^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\| \vec{f} - \frac{2}{3} \sum_j (\langle \vec{f}; \vec{e}_j \rangle + \alpha_j \epsilon) \vec{e}_j \right\|^2 &= \frac{4}{9} \epsilon^2 \mathcal{M} \left\| \sum_j \alpha_j \vec{e}_j \right\|^2 = \\ &= \frac{4}{9} \epsilon^2 \mathcal{M}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \frac{4}{3} \epsilon^2 = \frac{2}{3} \cdot 2\epsilon^2 \end{aligned}$$

Лекция 8. Методы определения параметров линейных систем

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Функция отклика ЛИВС

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика $h(\tau)$:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Функция отклика ЛИВС

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика $h(\tau)$:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t)$$

Функция отклика ЛИВС

Сигнал g на выходе ЛИВС связан с сигналом f на ее входе с помощью импульсной функции отклика $h(\tau)$:

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h(t)$$

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \delta[n - m] = h[n]$$

Функция отклика ЛИВС

Определение с помощью импульсного воздействия

Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = h(t)$$

Функция отклика ЛИВС

Определение с помощью импульсного воздействия

Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = h(t)$$

- Необходимо создать импульс бесконечно малой длительности

Функция отклика ЛИВС

Определение с помощью импульсного воздействия

Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = h(t)$$

- Необходимо создать импульс бесконечно малой длительности
- Импульс конечной энергии при этом имеет высокую амплитуду и может приводить к нелинейным процессам

Функция отклика ЛИВС

Определение с помощью импульсного воздействия

Реакция системы на импульсное воздействие

$$g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = h(t)$$

- Необходимо создать импульс бесконечно малой длительности
- Импульс конечной энергии при этом имеет высокую амплитуду и может приводить к нелинейным процессам
- Может быть сложно достичь идентичности импульсов

Корреляционная функция

Определение 8.1

Корреляционная функция K_{fg} сигналов $g(t)$ и $f(t)$ — величина, определяемая как $K_{fg}(\tau) = \mathcal{M} \left\{ (f(t + \tau) - \mathcal{M} \{f\}) \cdot \overline{(g(t) - \mathcal{M} \{g\})} \right\}$

Корреляционная функция

Определение 8.1

Корреляционная функция K_{fg} сигналов $g(t)$ и $f(t)$ — величина, определяемая как $K_{fg}(\tau) = \mathcal{M} \left\{ (f(t + \tau) - \mathcal{M} \{f\}) \cdot \overline{(g(t) - \mathcal{M} \{g\})} \right\}$

Если $\mathcal{M} \{f\} = 0$ и $\mathcal{M} \{g\} = 0$, то корреляционную функцию можно вычислить как $K_{gf}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \overline{g(t)} dt$.

Автокорреляционная функция

Если $f(t) = g(t)$, то **автокорреляционная функция** –

$$K_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \overline{f(t)} dt.$$

Автокорреляционная функция

Если $f(t) = g(t)$, то **автокорреляционная функция** –

$$K_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \overline{f(t)} dt.$$

Значение автокорреляционной функции в нуле

$$K_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \mathcal{M} \{|f|^2\} - \text{дисперсия сигнала.}$$

Автокорреляционная функция

Теорема Винера-Хинчина

$$\widetilde{K}_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Автокорреляционная функция

Теорема Винера-Хинчина

$$\widetilde{K}_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) \overline{f(t)} e^{-i\omega\tau} dt d\tau$$

Автокорреляционная функция

Теорема Винера-Хинчина

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{ff}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) \overline{f(t)} e^{-i\omega\tau} dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-i\omega(t+\tau)} \overline{f(t)} e^{-i\omega t} dt d\tau\end{aligned}$$

Автокорреляционная функция

Теорема Винера-Хинчина

$$\begin{aligned}
 \widetilde{K}_{ff}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) \overline{f(t)} e^{-i\omega\tau} dt d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-i\omega(t+\tau)} \overline{f(t) e^{-i\omega t}} dt d\tau = |\widetilde{f}(\omega)|^2
 \end{aligned}$$

Автокорреляционная функция

Теорема Винера-Хинчина

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_{ff}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) \overline{f(t)} e^{-i\omega\tau} dt d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-i\omega(t+\tau)} \overline{f(t) e^{-i\omega t}} dt d\tau = |\widetilde{f}(\omega)|^2\end{aligned}$$

$G(\omega) = |\widetilde{f}(\omega)|^2$ – спектр мощности сигнала

Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод



Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод

$$\xrightarrow{f(t)} \quad \hat{A} \quad \xrightarrow{\quad} \quad g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод

$$\xrightarrow{f(t)} \quad \hat{A} \quad \xrightarrow{\quad} \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Корреляционная функция “выхода” и “входа” ЛИВС

Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод

$$\xrightarrow{f(t)} \quad \hat{A} \quad \xrightarrow{\quad} \quad g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Корреляционная функция “выхода” и “входа” ЛИВС

$$K_{gf}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t' + t) \overline{f(t')} dt'$$

Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод

$$\xrightarrow{f(t)} \quad \hat{A} \quad \xrightarrow{\quad} \quad g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Корреляционная функция “выхода” и “входа” ЛИВС

$$K_{gf}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t' + t) \overline{f(t')} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t' + t - \tau) d\tau \cdot \overline{f(t')} dt'$$

Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод

$$\xrightarrow{f(t)} \quad \hat{A} \quad \xrightarrow{\quad} \quad g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Корреляционная функция “выхода” и “входа” ЛИВС

$$\begin{aligned} K_{gf}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t' + t) \overline{f(t')} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t' + t - \tau) d\tau \cdot \overline{f(t')} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t' + t - \tau) \overline{f(t')} dt' \end{aligned}$$

Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод

$$\xrightarrow{f(t)} \quad \boxed{\hat{A}} \quad \xrightarrow{\quad} \quad g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Корреляционная функция “выхода” и “входа” ЛИВС

$$\begin{aligned} K_{gf}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t' + t) \overline{f(t')} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t' + t - \tau) d\tau \cdot \overline{f(t')} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t' + t - \tau) \overline{f(t')} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) K_{ff}(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Функция отклика ЛИВС

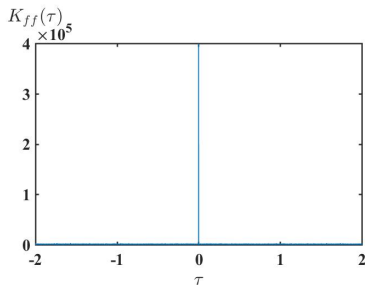
Корреляционный метод

$$\begin{cases} g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ K_{gf}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) K_{ff}(t - \tau) d\tau \end{cases}$$

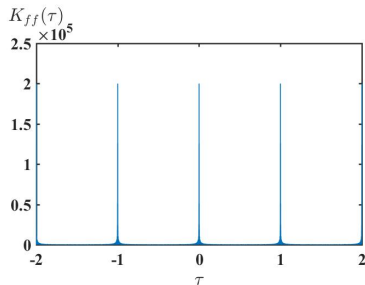
Функция отклика ЛИВС

Корреляционный метод

$$\begin{cases} g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ K_{gf}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau) K_{ff}(t - \tau) d\tau \end{cases}$$

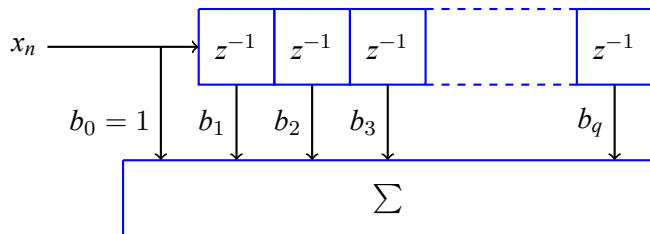


$f(t)$ – шумовой сигнал

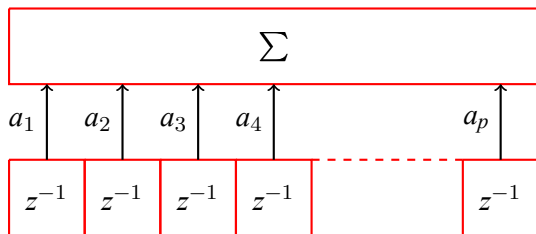
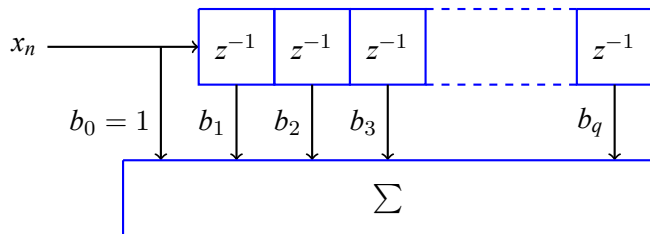


$f(t)$ – ЛЧМ с периодом 1 секунда

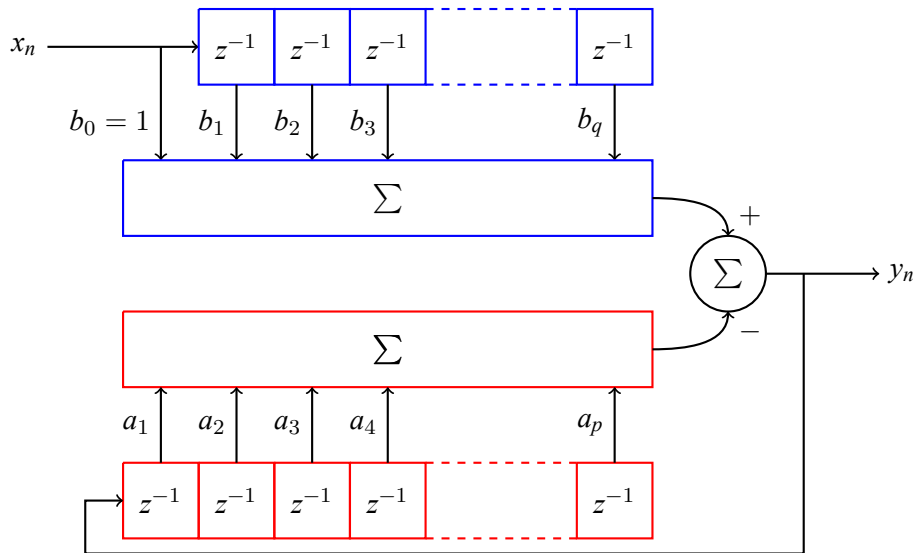
АРСС модель ЛИВС



АРСС модель ЛИВС



ARСС модель ЛИВС



АРСС модель ЛИВС

$$\text{АРСС}(p, q): \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

АРСС модель ЛИВС

$$\text{АРСС}(p, q): \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

$$\begin{cases} a[0] = 1 \\ \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^p a[k]y[n-k] \end{cases}$$

ARCC модель ЛИВС

$$\text{ARCC}(p, q): \quad \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

$$\begin{cases} a[0] = 1 \\ \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^p a[k]y[n-k] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \left\{ \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] \right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] = \\ &= \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-(n-k)}x[n-k] = X(z) \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} \end{aligned}$$

АРСС модель ЛИВС

$$\text{АРСС}(p, q): \quad \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

$$\begin{cases} a[0] = 1 \\ \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^p a[k]y[n-k] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \left\{ \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] \right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] = \\ &= \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-(n-k)}x[n-k] = X(z) \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} \end{aligned}$$

$$\mathbb{Z} \left\{ \sum_{k=0}^p a[k]y[n-k] \right\} = Y(z) \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}$$

ARCC модель ЛИВС

$$\text{ARCC}(p, q): \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

ARCC модель ЛИВС

$$\text{ARCC}(p, q): \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

$$X(z) \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} = Y(z) \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}$$

ARCC модель ЛИВС

$$\text{ARCC}(p, q): \quad \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

$$X(z) \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} = Y(z) \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}}$$

ARCC модель ЛИВС

$$\text{ARCC}(p, q): \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

$$X(z) \sum_{k=0}^q b[k]z^{-k} = Y(z) \sum_{k=0}^p a[k]z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = b[0] \frac{\prod_{k=0}^q (1 - z_k/z)}{\prod_{k=1}^p (1 - p_k/z)}$$

$b[0]$ – масштаб усиления; z_k – нули; p_k – полюсы функции $H(z)$

ARCC модель ЛИВС

Сведение модели ARCC(p, q) к модели AR(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}$$

АРСС модель ЛИВС

Сведение модели АРСС(p, q) к модели АР(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}$$

$$B(z)C(z) = A(z)$$

АРСС модель ЛИВС

Сведение модели АРСС(p, q) к модели АР(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}$$

$$B(z)C(z) = A(z)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^q b[k]c[n-k] = a[n] \\ b[0] = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

АРСС модель ЛИВС

Сведение модели АРСС(p, q) к модели АР(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}$$

$$B(z)C(z) = A(z)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^q b[k]c[n-k] = a[n] \\ b[0] = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c[n] + \sum_{k=1}^q b[k]c[n-k] = a[n] \\ b[0] = 1 \end{cases}$$

АРСС модель ЛИВС

Сведение модели АРСС(p, q) к модели АР(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}$$

$$B(z)C(z) = A(z)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^q b[k]c[n-k] = a[n] \\ b[0] = 1 \end{cases} \Rightarrow c[n] = \begin{cases} 1; & n = 0; \\ a[n] - \sum_{k=1}^q b[k]c[n-k]; & 1 \leq n \leq p; \\ - \sum_{k=1}^q b[k]c[n-k]; & n > p. \end{cases}$$

ARCC модель ЛИВС

Сведение модели ARCC(p, q) к модели CC(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z)$$

ARCC модель ЛИВС

Сведение модели ARCC(p, q) к модели CC(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z)$$

$$A(z)D(z) = B(z)$$

ARCC модель ЛИВС

Сведение модели ARCC(p, q) к модели CC(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z)$$

$$A(z)D(z) = B(z)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^p a[k]d[n-k] = b[n] \\ a[0] = 1; b[0] = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

ARCC модель ЛИВС

Сведение модели ARCC(p, q) к модели CC(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z)$$

$$A(z)D(z) = B(z)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^p a[k]d[n-k] = b[n] \\ a[0] = 1; b[0] = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d[n] + \sum_{k=1}^p a[k]d[n-k] = b[n] \\ a[0] = 1; b[0] = 1 \end{cases}$$

ARCC модель ЛИВС

Сведение модели ARCC(p, q) к модели CC(∞)

$$H(z) = \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a[k]z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} = D(z)$$

$$A(z)D(z) = B(z)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^p a[k]d[n-k] = b[n] \\ a[0] = 1; b[0] = 1 \end{cases} \Rightarrow d[n] = \begin{cases} 1; & n = 0; \\ b[n] - \sum_{k=1}^p a[k]d[n-k]; & 1 \leq n \leq q; \\ - \sum_{k=1}^p a[k]d[n-k]; & n > q. \end{cases}$$

ARСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$\sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

ARСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$\sum_{k=0}^q b[k]x[n-k] - \sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] = y[n]$$

Корреляционная функция $r_{yy}[m] = \mathcal{M} \left\{ y[n] \overline{y[n-m]} \right\} =$

$$= \sum_{k=0}^q b[k] \mathcal{M} \left\{ x[n-k] \overline{y[n-m]} \right\} - \sum_{k=1}^p a[k] \mathcal{M} \left\{ y[n-k] \overline{y[n-m]} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^q b[k] r_{xy}[m-k] - \sum_{k=1}^p a[k] r_{yy}[m-k]$$

АРСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$y[m] = \sum_{k=1}^{\infty} h[k]x[m-k] + x[m] \quad \overline{y[m]} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \overline{x[m-k]} + \overline{x[m]}$$

ARСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$y[m] = \sum_{k=1}^{\infty} h[k]x[m-k] + x[m] \quad \overline{y[m]} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \overline{x[m-k]} + \overline{x[m]}$$

Корреляционная функция $r_{xy}[i] = \mathcal{M} \{x[i+m] \overline{y[m]}\} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \mathcal{M} \{x[i+m] \overline{x[m-k]}\} + \mathcal{M} \{x[i+m] \overline{x[m]}\} =$$

$$= r_{xx}[i] + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} r_{xx}[i+k]$$

ARСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$y[m] = \sum_{k=1}^{\infty} h[k]x[m-k] + x[m] \quad \overline{y[m]} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \overline{x[m-k]} + \overline{x[m]}$$

Корреляционная функция $r_{xy}[i] = \mathcal{M} \left\{ x[i+m] \overline{y[m]} \right\} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \mathcal{M} \left\{ x[i+m] \overline{x[m-k]} \right\} + \mathcal{M} \left\{ x[i+m] \overline{x[m]} \right\} =$$

$$= r_{xx}[i] + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} r_{xx}[i+k]$$

Если $x[n]$ – белый шум, то $r_{xx}[i] = \rho\delta[i]$

ARСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$y[m] = \sum_{k=1}^{\infty} h[k]x[m-k] + x[m] \quad \overline{y[m]} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \overline{x[m-k]} + \overline{x[m]}$$

Корреляционная функция $r_{xy}[i] = \mathcal{M} \left\{ x[i+m] \overline{y[m]} \right\} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \mathcal{M} \left\{ x[i+m] \overline{x[m-k]} \right\} + \mathcal{M} \left\{ x[i+m] \overline{x[m]} \right\} =$$

$$= r_{xx}[i] + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} r_{xx}[i+k]$$

Если $x[n]$ – белый шум, то $r_{xx}[i] = \rho\delta[i]$

$$r_{xy}[i] = \rho\delta[i] + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h[k]} \rho\delta[i+k] = \rho\delta[i] + \overline{\rho h_{i<0}[-i]}$$

ARСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$r_{yy}[m] = \sum_{k=0}^q b[k]r_{xy}[m-k] - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k]$$

$$r_{xy}[i] = \rho\delta[i] + \overline{\rho h_{i<0}[-i]}$$

$$r_{yy}[m] = \sum_{k=0}^q b[k](\rho\delta[m-k] + \overline{\rho h_{m<k}[k-m]}) - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] =$$

$$= \begin{cases} - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] & m > q \\ - \sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] + \rho \sum_{k=m}^q b[k]\overline{h[k-m]} & m \leq q \end{cases}$$

АРСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$r_{yy}[m] = \begin{cases} \overline{r_{yy}[-m]} & m < 0 \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] + \rho \sum_{k=m}^q b[k]\overline{h[k-m]} & 0 \leq m < q \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] & m > q \end{cases}$$

АРСС модель ЛИВС

Определение $a[n]$ и $b[n]$. Уравнения Юла-Уокера

$$r_{yy}[m] = \begin{cases} \overline{r_{yy}[-m]} & m < 0 \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] + \rho \sum_{k=m}^q b[k]\overline{h[k-m]} & 0 \leq m < q \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{yy}[m-k] & m > q \end{cases}$$

Уравнения Юла-Уокера

$$\begin{pmatrix} r_{yy}[q] & r_{yy}[q-1] & \dots & r_{yy}[q-p+1] \\ r_{yy}[q+1] & r_{yy}[q] & \ddots & r_{yy}[q-p+2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}[q+p-1] & r_{yy}[q+2] & \dots & r_{yy}[q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{yy}[q+1] \\ r_{yy}[q+2] \\ \vdots \\ r_{yy}[q+p] \end{pmatrix}$$

Лекция 9. Оценивание параметров сигналов

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Классификация объектов по параметрам

Типы признаков

Определение 9.1

Признак — отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{D}_f$, где \mathbb{X} — множество описаний объектов; \mathbb{D}_f — множество допустимых значений признака. Если заданы признаки f_1, f_2, \dots, f_n , то вектор $\vec{x} = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ называется признаковым описанием объекта $\vec{x} \in \mathbb{X}$. Множество $\mathbb{D}_{f_1} \times \mathbb{D}_{f_2} \times \dots \times \mathbb{D}_{f_n}$ называют признаковым пространством.

Классификация объектов по параметрам

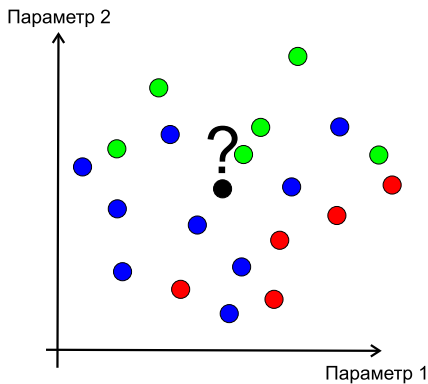
Типы признаков

Определение 9.1

Признак — отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{D}_f$, где \mathbb{X} — множество описаний объектов; \mathbb{D}_f — множество допустимых значений признака. Если заданы признаки f_1, f_2, \dots, f_n , то вектор $\vec{x} = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ называется признаковым описанием объекта $\vec{x} \in \mathbb{X}$. Множество $\mathbb{D}_{f_1} \times \mathbb{D}_{f_2} \times \dots \times \mathbb{D}_{f_n}$ называют признаковым пространством.

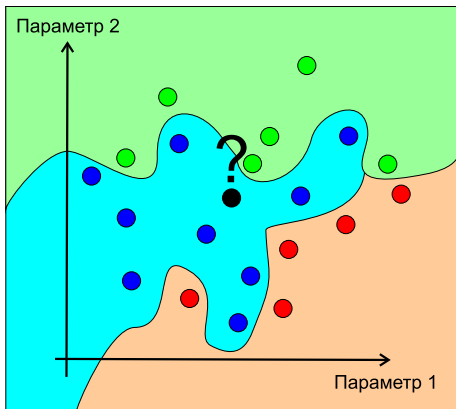
- бинарный признак: $\mathbb{D}_f = \{0, 1\}$;
- номинальный признак: \mathbb{D}_f — конечное множество;
- порядковый признак: \mathbb{D}_f — конечное упорядоченное множество;
- количественный признак: \mathbb{D}_f — множество действительных чисел.

Классификация объектов по параметрам



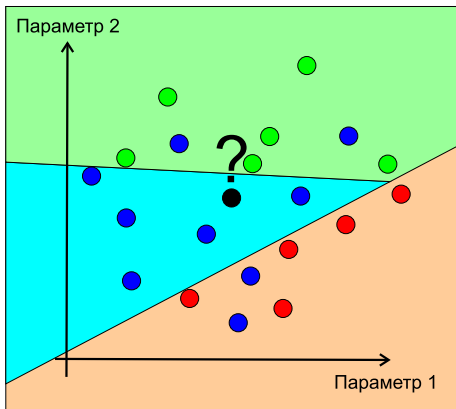
Классификация объектов по параметрам

Определение областей



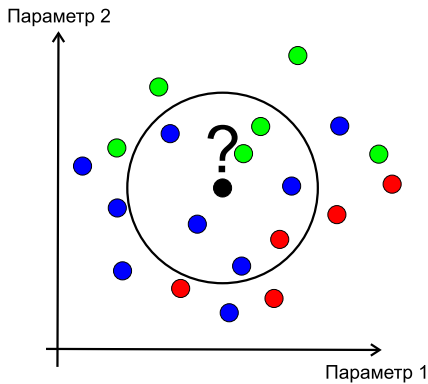
Классификация объектов по параметрам

Регуляризация



Классификация объектов по параметрам

Метод k ближайших соседей



Классификация объектов по параметрам

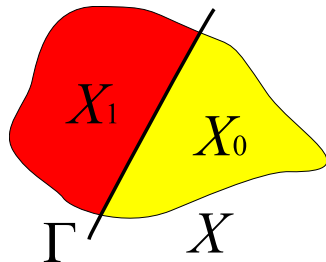
Предварительная обработка данных

- Нормализация данных: $x' = (x - \min x) / (\max x - \min x)$
- Выделение значимых параметров
- Взвешивание расстояний: $Q_j = \sum d^{-2}(x, a_j)$

Принятие решений в бинарной ситуации


Метод Байеса

		Истина	
		Нет p_0	Да p_1
Альтернатива	1	Ложная тревога	Правильное обнаружение
	0	Правильное необнаружение	Пропуск цели



Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

СТ  ПКОРОНАВИРУС.РФ

Единая горячая линия
8-800-2000-112

WhatsApp Telegram Facebook YouTube


Официальная информация о коронавирусе в России

О коронавирусе • Меры Правительства • Что предпринять? • Вопросы и ответы • Полезная информация • Вакцинация •



Оперативные данные

госуслуги

ЗАПИСЬ НА ПРИВИВКУ ОТ COVID-19



Отчет о текущей ситуации с коронавирусом в РФ: статистика, данные из регионов, меры Правительства РФ.
PDF • 3.8 МВ [Скачать ↓](#)
[Все отчеты](#)

53 511 786	49 161 150	8 316 019	36 446	7 213 584
Вакцинация первым компонентом 	Полная вакцинация 	Выявлено случаев	Выявлено случаев за последние сутки	Человека выздоровело
По состоянию на 22 октября		По состоянию на 26 октября 11:30		

[Подробнее данные](#) [Все о вакцинации](#)

Численность населения России 144,5 млн человек

Вероятность болеть $p(B) = (8316019 - 7213584) / 144500000 \approx 0,76\%$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

Пусть супер-тест дает правильный результат в 99% случаев. Какова вероятность оказаться больным при положительном тесте? Вероятность болеть $p(B) = 0,76\%$.

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

Пусть супер-тест дает правильный результат в 99% случаев. Какова вероятность оказаться больным при положительном тесте? Вероятность болеть $p(B) = 0,76\%$.

	$p(Z)$	$p(B)$
$p(\text{Верно})$		
$p(\text{Неверно})$		

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

Пусть супер-тест дает правильный результат в 99% случаев. Какова вероятность оказаться больным при положительном тесте? Вероятность болеть $p(B) = 0,76\%$.

	$p(З)$	$p(Б)$
$p(\text{Верно})$		
$p(\text{Неверно})$		

$$p(B|+) = \frac{p(B) \cdot p(V)}{p(B) \cdot p(V) + p(З) \cdot p(H)}$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

Пусть супер-тест дает правильный результат в 99% случаев. Какова вероятность оказаться больным при положительном тесте? Вероятность болеть $p(B) = 0,76\%$.

	$p(Z)$	$p(B)$
$p(\text{Верно})$		
$p(\text{Неверно})$		

$$p(B|+) = \frac{p(B) \cdot p(V)}{p(B) \cdot p(V) + p(Z) \cdot p(H)} = \frac{0,0076 \cdot 0,99}{0,0076 \cdot 0,99 + 0,9924 \cdot 0,01}$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

Пусть супер-тест дает правильный результат в 99% случаев. Какова вероятность оказаться больным при положительном тесте? Вероятность болеть $p(B) = 0,76\%$.

	$p(Z)$	$p(B)$
$p(\text{Верно})$		
$p(\text{Неверно})$		

$$p(B|+) = \frac{p(B) \cdot p(V)}{p(B) \cdot p(V) + p(Z) \cdot p(N)} = \frac{0,0076 \cdot 0,99}{0,0076 \cdot 0,99 + 0,9924 \cdot 0,01} \approx 0,43$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

- Известна “матрица платежей”
- Известны p_0 и p_1 – априорные вероятности событий
- Для каждого $x \in X$ известны $p(x|1)$ и $p(x|0)$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

- Известна “матрица платежей”
- Известны p_0 и p_1 – априорные вероятности событий
- Для каждого $x \in X$ известны $p(x|1)$ и $p(x|0)$

$$\text{Да}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_1 \\ 0 & x \in X_0 \end{cases} \quad \text{Нет}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_0 \\ 0 & x \in X_1 \end{cases}$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

- Известна “матрица платежей”
- Известны p_0 и p_1 – априорные вероятности событий
- Для каждого $x \in X$ известны $p(x|1)$ и $p(x|0)$

$$\text{Да}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_1 \\ 0 & x \in X_0 \end{cases} \quad \text{Нет}(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_0 \\ 0 & x \in X_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Риск} &= \text{ЦЛТ} \cdot p(x \in X_1, 0) + \text{ЦПЦ} \cdot p(x \in X_0, 1) = \\ &= \text{ЦЛТ} \int_{X_1} p(x|0)p_0 dx + \text{ЦПЦ} \int_{X_0} p(x|1)p_1 dx = \\ &= \int_X dx [\text{ЦЛТ} \cdot \text{Да}(x)p(x|0)p_0 + \text{ЦПЦ} \cdot \text{Нет}(x)p(x|1)p_1] \end{aligned}$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

$$\text{Риск} = \int_X dx [\text{ЦЛТ} \cdot \text{Да}(x)p(x|0)p_0 + \text{ЦПЦ} \cdot \text{Нет}(x)p(x|1)p_1]$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

$$\text{Риск} = \int_X dx [\text{ЦЛТ} \cdot \text{Да}(x)p(x|0)p_0 + \text{ЦПЦ} \cdot \text{Нет}(x)p(x|1)p_1]$$

Минимизируем риск, выбирая для каждого x значения Да или Нет

$$\frac{\text{ЦЛТ} \cdot p(x|0)p_0}{\text{ЦПЦ} \cdot p(x|1)p_1} \underset{\text{Нет}}{\overset{\text{Да}}{\lesseqgtr}} 1$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Метод Байеса

$$\text{Риск} = \int_X dx [\text{ЦЛТ} \cdot \text{Да}(x)p(x|0)p_0 + \text{ЦПЦ} \cdot \text{Нет}(x)p(x|1)p_1]$$

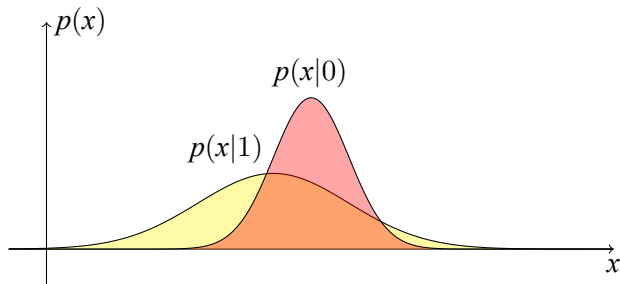
Минимизируем риск, выбирая для каждого x значения Да или Нет

$$\frac{\text{ЦЛТ} \cdot p(x|0)p_0}{\text{ЦПЦ} \cdot p(x|1)p_1} \underset{\text{Нет}}{\overset{\text{Да}}{\gtrless}} 1$$

$$\text{Отношение правдоподобия } L = \frac{p(x|1)}{p(x|0)} \underset{\text{Нет}}{\overset{\text{Да}}{\gtrless}} \frac{\text{ЦЛТ} \cdot p_0}{\text{ЦПЦ} \cdot p_1}$$

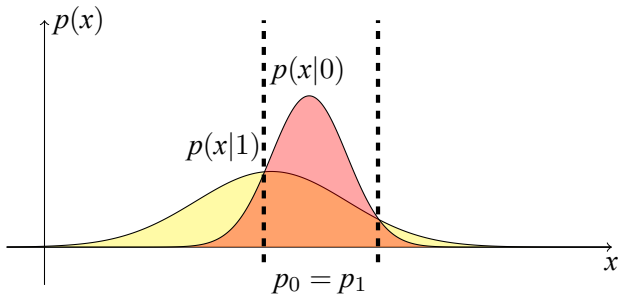
Принятие решений в бинарной ситуации

Построение разделяющих поверхностей



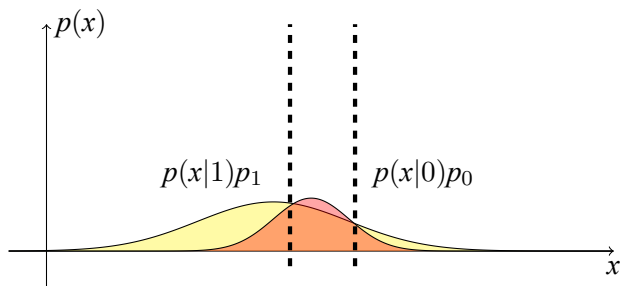
Принятие решений в бинарной ситуации

Построение разделяющих поверхностей



Принятие решений в бинарной ситуации

Построение разделяющих поверхностей



Принятие решений в бинарной ситуации

Наивный байесовский классификатор

Определение 9.2

Наивный байесовский классификатор (naïve Bayes) — специальный частный случай байесовского классификатора, основанный на дополнительном предположении, что объекты описываются статистически независимыми признаками

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{j=1}^k w(x_j | \theta)$$

Принятие решений в бинарной ситуации

Наивный байесовский классификатор

Определение 9.2

Наивный байесовский классификатор (naïve Bayes) — специальный частный случай байесовского классификатора, основанный на дополнительном предположении, что объекты описываются статистически независимыми признаками

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{j=1}^k w(x_j | \theta)$$

На практике это условие почти никогда не выполняется, но позволяет упростить задачу.

Оценка постоянных параметров сигнала

- Необходимо построить оценку $\hat{\theta}$ параметра θ

Оценка постоянных параметров сигнала

- Необходимо построить оценку $\hat{\theta}$ параметра θ
- В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$, причем $w(\vec{y}|\theta)$ зависит от θ

Оценка постоянных параметров сигнала

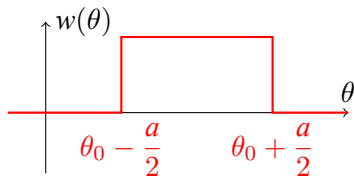
- Необходимо построить оценку $\hat{\theta}$ параметра θ
- В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$, причем $w(\vec{y}|\theta)$ зависит от θ
- Априори известно распределение $w(\theta)$

Оценка постоянных параметров сигнала

- Необходимо построить оценку $\hat{\theta}$ параметра θ
- В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$, причем $w(\vec{y}|\theta)$ зависит от θ
- Априори известно распределение $w(\theta)$

Пример:

$$w(\theta) = \begin{cases} 1/a & |\theta - \theta_0| \leq a/2 \\ 0 & |\theta - \theta_0| > a/2 \end{cases}$$

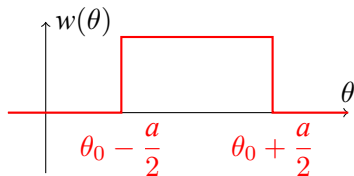


Оценка постоянных параметров сигнала

- Необходимо построить оценку $\hat{\theta}$ параметра θ
- В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$, причем $w(\vec{y}|\theta)$ зависит от θ
- Априори известно распределение $w(\theta)$

Пример:

$$w(\theta) = \begin{cases} 1/a & |\theta - \theta_0| \leq a/2 \\ 0 & |\theta - \theta_0| > a/2 \end{cases}$$



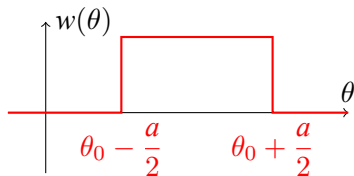
Если $a \rightarrow 0$, то играет роль априорная информация;

Оценка постоянных параметров сигнала

- Необходимо построить оценку $\hat{\theta}$ параметра θ
- В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_n$, причем $w(\vec{y}|\theta)$ зависит от θ
- Априори известно распределение $w(\theta)$

Пример:

$$w(\theta) = \begin{cases} 1/a & |\theta - \theta_0| \leq a/2 \\ 0 & |\theta - \theta_0| > a/2 \end{cases}$$



Если $a \rightarrow 0$, то играет роль априорная информация;

Если $a \rightarrow \infty$, то важны данные, полученные в эксперименте

Оценка постоянных параметров

Байесовский подход

В эксперименте получены данные \vec{y}

Ошибка оценки $\epsilon(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) = \hat{\theta}(\vec{y}) - \theta$

Характеристика потерь $\mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y}))$

Нужно найти минимум средней функции потерь

$$\mathcal{M} \left\{ \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta, \vec{y})$$

Оценка постоянных параметров

Примеры функции потерь

- Квадратичная: $\mathcal{L}_{\text{quad}}(\theta; \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$
- Модульная: $\mathcal{L}_{\text{abs}}(\theta; \hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$
- Простая: $\mathcal{L}_{\text{simple}}(\theta; \hat{\theta}) = -\delta(\theta - \hat{\theta})$

Оценка постоянных параметров

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} \{ \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta, \vec{y}) = \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta | \vec{y}) w(\vec{y}) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{y} w(\vec{y}) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta \mathcal{L}(\theta; \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta | \vec{y})}_{\mathcal{L}_a}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_a \rightarrow \min \quad \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

Оценка постоянных параметров

Квадратичная функция потерь: $\mathcal{L}_{\text{quad}}(\theta; \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta (\theta - \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta|\vec{y}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\int \theta w(\theta|\vec{y}) d\theta}{\int w(\theta|\vec{y}) d\theta} = \int \theta w(\theta|\vec{y}) d\theta$$

Это математическое ожидание для апостериорного распределения $w(\theta|\vec{y})$

Оценка постоянных параметров

Квадратичная функция потерь: $\mathcal{L}_{\text{quad}}(\theta; \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta (\theta - \hat{\theta}(\vec{y})) w(\theta|\vec{y}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\int \theta w(\theta|\vec{y}) d\theta}{\int w(\theta|\vec{y}) d\theta} = \int \theta w(\theta|\vec{y}) d\theta$$

Это математическое ожидание для апостериорного распределения $w(\theta|\vec{y})$

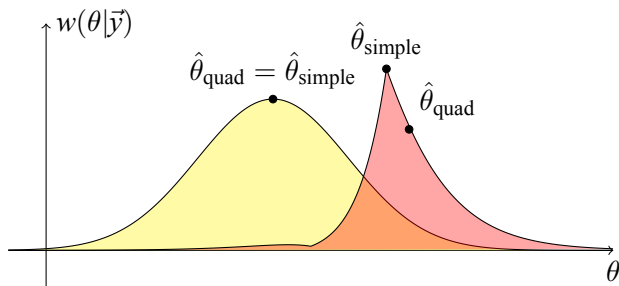
Простая функция потерь: $\mathcal{L}_{\text{simple}}(\theta; \hat{\theta}) = -\delta(\theta - \hat{\theta})$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \int w(\theta|\vec{y}) \delta(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) d\theta = \frac{\partial w(\theta|\vec{y})}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

Это максимум апостериорного распределения $w(\theta|\vec{y})$

Оценка постоянных параметров

Оценки для симметричных и асимметричных распределений



Оценка постоянных параметров

Функция правдоподобия

Формула Байеса: $w(\theta|\vec{y})w(\vec{y}) = w(\vec{y}|\theta)w(\theta)$

$$\Rightarrow w(\theta|\vec{y}) = \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y}|\theta)w(\theta)$$

Оценка постоянных параметров

Функция правдоподобия

Формула Байеса: $w(\theta|\vec{y})w(\vec{y}) = w(\vec{y}|\theta)w(\theta)$

$$\Rightarrow w(\theta|\vec{y}) = \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y}|\theta)w(\theta)$$

Определение 9.3

Функция правдоподобия — условная вероятность $L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta)$, взятая при фиксированных (полученных в эксперименте) значениях \vec{y}

Оценка постоянных параметров

Функция правдоподобия

Формула Байеса: $w(\theta|\vec{y})w(\vec{y}) = w(\vec{y}|\theta)w(\theta)$

$$\Rightarrow w(\theta|\vec{y}) = \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y}|\theta)w(\theta)$$

Определение 9.3

Функция правдоподобия — условная вероятность $L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta)$, взятая при фиксированных (полученных в эксперименте) значениях \vec{y}

- Метод максимума апостериорной функции распределения $w(\hat{\theta}|\vec{y})$
- Метод максимального правдоподобия $L(\theta)$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

$\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ – наблюдения параметра θ
на фоне шума $\vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ $(0; \sigma^2)$

Модель такой системы: $y_j = \theta + n_j$

Априорное распределение θ нормально:

$$w(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \quad \Rightarrow \quad n_j = y_j - \theta$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \quad \Rightarrow \quad n_j = y_j - \theta$$

$$L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta) = \prod_j w(y_j|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2\right)$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \quad \Rightarrow \quad n_j = y_j - \theta$$

$$L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta) = \prod_j w(y_j|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2\right)$$

$$\max L(\theta) \Leftrightarrow \max \ln L(\theta)$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \quad \Rightarrow \quad n_j = y_j - \theta$$

$$L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta) = \prod_j w(y_j|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2\right)$$

$$\max L(\theta) \Leftrightarrow \max \ln L(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 = 0$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \quad \Rightarrow \quad n_j = y_j - \theta$$

$$L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta) = \prod_j w(y_j|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sigma^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2\right)$$

$$\max L(\theta) \Leftrightarrow \max \ln L(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k (y_j - \theta) = 0$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \quad \Rightarrow \quad n_j = y_j - \theta$$

$$L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta) = \prod_j w(y_j|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sigma^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2\right)$$

$$\max L(\theta) \Leftrightarrow \max \ln L(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k (y_j - \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{\text{mle}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимального правдоподобия

$$y_j = \theta + n_j \quad \Rightarrow \quad n_j = y_j - \theta$$

$$L(\theta) \equiv w(\vec{y}|\theta) = \prod_j w(y_j|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sigma^k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2\right)$$

$$\max L(\theta) \Leftrightarrow \max \ln L(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^k (y_j - \theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{\text{mle}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{mle}}^2 &= \mathcal{M}\{(\hat{\theta}_{\text{mle}} - \theta)^2\} = \\ &= \mathcal{M}\left\{\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j - \theta\right)^2\right\} = \mathcal{M}\left\{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \underbrace{(y_j - \theta)^2}_{n_j}\right\} = \frac{\sigma^2}{k} \end{aligned}$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимума апостериорной функции распределения

$$\begin{aligned}w(\theta|\vec{y}) &= \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y}|\theta) w(\theta) = \\ &= \frac{1}{w(\vec{y})} \frac{1}{(2\pi)^{(k+1)/2} \sigma^k \sigma_0} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} (\theta - \theta_0)^2\right)\end{aligned}$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимума апостериорной функции распределения

$$\begin{aligned}
 w(\theta|\vec{y}) &= \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y}|\theta) w(\theta) = \\
 &= \frac{1}{w(\vec{y})} \frac{1}{(2\pi)^{(k+1)/2} \sigma^k \sigma_0} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} (\theta - \theta_0)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\max w(\theta|\vec{y}) \Leftrightarrow \max \ln w(\theta|\vec{y})$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимума апостериорной функции распределения

$$\begin{aligned}
 w(\theta|\vec{y}) &= \frac{1}{w(\vec{y})} w(\vec{y}|\theta) w(\theta) = \\
 &= \frac{1}{w(\vec{y})} \frac{1}{(2\pi)^{(k+1)/2} \sigma^k \sigma_0} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \theta)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} (\theta - \theta_0)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\max w(\theta|\vec{y}) \Leftrightarrow \max \ln w(\theta|\vec{y})$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{\theta}_{\text{map}}) + \frac{1}{\sigma_0^2} (\hat{\theta}_{\text{map}} - \theta_0) = 0$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимума апостериорной функции распределения

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{\theta}_{\text{map}}) + \frac{1}{\sigma_0^2} (\hat{\theta}_{\text{map}} - \theta_0) = 0$$

$$\hat{\theta}_{\text{map}} \left(\underbrace{\frac{k}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}_{1/\sigma_{\text{mle}}^2} \right) = \frac{\theta_0}{\sigma_0^2} + \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j}_{\hat{\theta}_{\text{mle}}^2} \underbrace{\frac{k}{\sigma^2}}_{1/\sigma_{\text{mle}}^2}$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимума апостериорной функции распределения

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{\theta}_{\text{map}}) + \frac{1}{\sigma_0^2} (\hat{\theta}_{\text{map}} - \theta_0) = 0$$

$$\hat{\theta}_{\text{map}} \left(\underbrace{\frac{k}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}_{1/\sigma_{\text{mle}}^2} \right) = \frac{\theta_0}{\sigma_0^2} + \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j}_{\hat{\theta}_{\text{mle}}^2} \underbrace{\frac{k}{\sigma^2}}_{1/\sigma_{\text{mle}}^2}$$

$$\hat{\theta}_{\text{map}} = \frac{\sigma_{\text{mle}}^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\text{mle}}^2} \theta_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\text{mle}}^2} \hat{\theta}_{\text{mle}}$$

Наблюдения параметра на фоне гауссового шума

Метод максимума апостериорной функции распределения

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k (y_j - \hat{\theta}_{\text{map}}) + \frac{1}{\sigma_0^2} (\hat{\theta}_{\text{map}} - \theta_0) = 0$$

$$\hat{\theta}_{\text{map}} \left(\underbrace{\frac{k}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}_{1/\sigma_{\text{mle}}^2} \right) = \frac{\theta_0}{\sigma_0^2} + \underbrace{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j}_{\hat{\theta}_{\text{mle}}^2} \underbrace{\frac{k}{\sigma^2}}_{1/\sigma_{\text{mle}}^2}$$

$$\hat{\theta}_{\text{map}} = \frac{\sigma_{\text{mle}}^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\text{mle}}^2} \theta_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\text{mle}}^2} \hat{\theta}_{\text{mle}}$$

Если $\sigma_0^2 \gg \sigma_{\text{mle}}^2$, то $\hat{\theta}_{\text{map}} \approx \hat{\theta}_{\text{mle}}$, т.е. эксперимент имеет решающее значение

Если $\sigma_0^2 \ll \sigma_{\text{mle}}^2$, то данные эксперимента почти не существенны

Линейная регрессия

Векторы $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_l\}$ (регрессоры) содержат значения независимых переменных

Вектор \vec{y} содержит значения зависимой переменной

Требуется определить зависимость \vec{y} от $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_l\}$

Модель: $\vec{y} = \mathcal{X}\vec{a} + \vec{\epsilon}$; $\epsilon_j = \text{norm}(0, \sigma^2)$

Предполагается, что неизвестные коэффициенты $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ распределены нормально: $w(\vec{a}) = \frac{\lambda}{(2\pi)^{l/2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2\right)$

Линейная регрессия

Метод максимального правдоподобия

$$\ln L(\vec{a}) = \ln w(\vec{y}|\mathcal{X}, \vec{a}) = \sum_{i=1}^k \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_j \right)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \left(y_i - \sum_{j=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_j \right)^2 \rightarrow \min$$

Линейная регрессия

Метод Байеса

$$\ln L(\vec{a}) + \ln w(\vec{a}) =$$

$$= - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^k \frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_j \right)^2}{2\sigma^2} + \ln \frac{\lambda}{(2\pi)^{l/2}} - \frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \left(y_i - \sum_{j=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_j \right)^2}_{\text{Квадратичная ошибка}} + \underbrace{\frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2}_{\text{L2-регуляризация}} \rightarrow \min$$

Линейная регрессия

Метод Байеса

$$\ln L(\vec{a}) + \ln w(\vec{a}) =$$

$$= - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^k \frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_j\right)^2}{2\sigma^2} + \ln \frac{\lambda}{(2\pi)^{l/2}} - \frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \left(y_i - \sum_{j=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_j\right)^2}_{\text{Квадратичная ошибка}} + \underbrace{\frac{\lambda^2}{2} |\vec{a}|^2}_{\text{L2-регуляризация}} \rightarrow \min$$

$$\vec{a} = \mathcal{X} (\mathcal{X}^T \mathcal{X} + \sigma \lambda \mathcal{E})^{-1} \mathcal{X}^T \vec{y}$$

Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия

Необходимо оценить вероятность выпадения орла, имея данные эксперимента $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия

Необходимо оценить вероятность выпадения орла, имея данные эксперимента $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

$$p(y_j|\theta) = \theta^{y_j}(1 - \theta)^{1-y_j}$$

Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия

Необходимо оценить вероятность выпадения орла, имея данные эксперимента $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

$$p(y_j|\theta) = \theta^{y_j}(1 - \theta)^{1-y_j}$$

$$\ln L = \sum_{j=1}^k \ln p(y_j|\theta) = \sum_{j=1}^k (y_j \ln \theta + (1 - y_j) \ln(1 - \theta)) \rightarrow \max$$

Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия

Необходимо оценить вероятность выпадения орла, имея данные эксперимента $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

$$p(y_j|\theta) = \theta^{y_j}(1 - \theta)^{1-y_j}$$

$$\ln L = \sum_{j=1}^k \ln p(y_j|\theta) = \sum_{j=1}^k (y_j \ln \theta + (1 - y_j) \ln(1 - \theta)) \rightarrow \max$$

$$\hat{\theta}_{\text{mle}} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j$$

Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: байесовский подход

Необходимо оценить вероятность выпадения орла, имея данные эксперимента $\vec{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$.

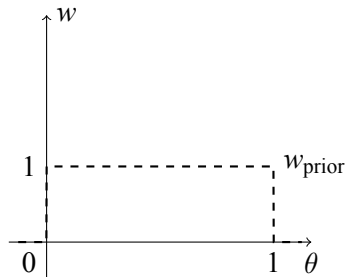
$$p(\theta|\vec{y}) = \frac{1}{p(\vec{y})}p(\vec{y}|\theta)p(\theta)$$

$$\ln p(\theta|\vec{y}) = \ln p(\vec{y}|\theta) + \ln p(\theta) - \ln p(\vec{y})$$

$$\ln L + \ln p(\theta) \rightarrow \max$$

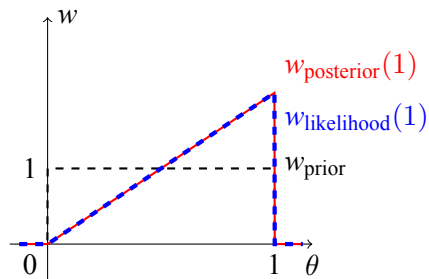
Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия



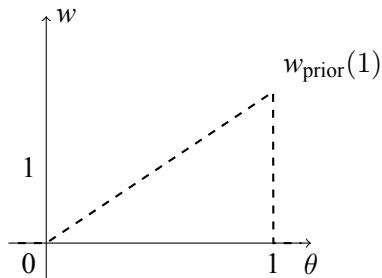
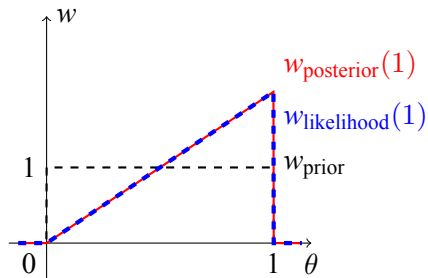
Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия



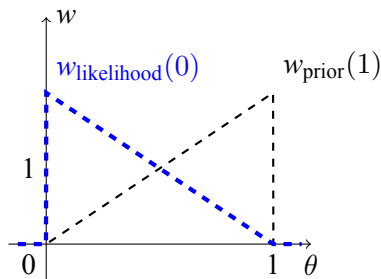
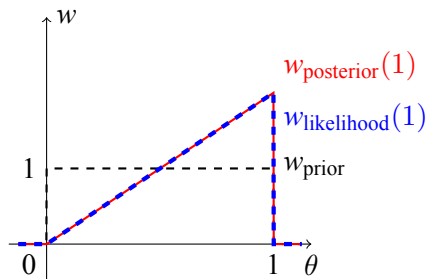
Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия



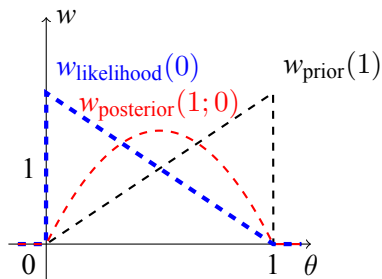
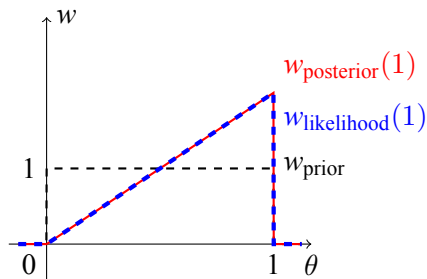
Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия



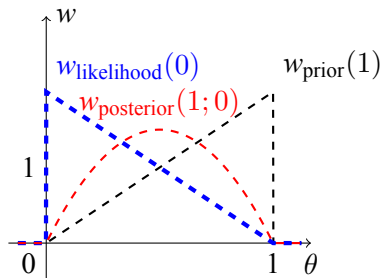
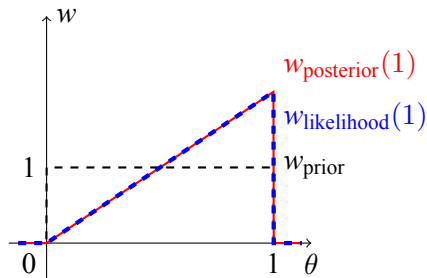
Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия



Определение вероятностей исходов

Эксперимент с монеткой: метод максимального правдоподобия



При малом числе бросков склонность к переобучению.
Нет возможности внести дополнительную информацию.

Логистическая функция ошибки

Объект, обладающий признаками \vec{x} , относится к j -му классу с вероятностью $p_j; j = 1, 2, \dots, s$.

Алгоритм на основе \vec{x} определяет эту вероятность как q_j .

При $N \gg 1$ испытаниях j -й класс реализовался $n_j = Np_j$ раз.

Логистическая функция ошибки

Объект, обладающий признаками \vec{x} , относится к j -му классу с вероятностью p_j ; $j = 1, 2, \dots, s$.

Алгоритм на основе \vec{x} определяет эту вероятность как q_j .

При $N \gg 1$ испытаниях j -й класс реализовался $n_j = Np_j$ раз.

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s) = p(n_1, n_2, \dots, n_s | q_1, q_2, \dots, q_s) = \prod_{j=1}^s q_j^{Np_j}$$

Логистическая функция ошибки

Объект, обладающий признаками \vec{x} , относится к j -му классу с вероятностью p_j ; $j = 1, 2, \dots, s$.

Алгоритм на основе \vec{x} определяет эту вероятность как q_j .

При $N \gg 1$ испытаниях j -й класс реализовался $n_j = Np_j$ раз.

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s) = p(n_1, n_2, \dots, n_s | q_1, q_2, \dots, q_s) = \prod_{j=1}^s q_j^{Np_j}$$

$$\mathcal{L}_{\log} \equiv -\ln L(q_1, q_2, \dots, q_s) = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j = NH(p, q) \rightarrow \min$$

Логистическая функция ошибки

Объект, обладающий признаками \vec{x} , относится к j -му классу с вероятностью $p_j, j = 1, 2, \dots, s$.

Алгоритм на основе \vec{x} определяет эту вероятность как q_j .

При $N \gg 1$ испытаниях j -й класс реализовался $n_j = Np_j$ раз.

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s) = p(n_1, n_2, \dots, n_s | q_1, q_2, \dots, q_s) = \prod_{j=1}^s q_j^{Np_j}$$

$$\mathcal{L}_{\log} \equiv -\ln L(q_1, q_2, \dots, q_s) = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j = NH(p, q) \rightarrow \min$$

Определение 9.4

Перекрестная энтропия (cross entropy) — функция между двумя распределениями вероятностей $H(p, q) = -\sum p_j \ln q_j$

Минимум перекрестной энтропии

$$H(p,q) = - \sum p_j \ln q_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0; \quad \sum q_j = 1$$

$$\xi = - \sum p_j \ln q_j + \lambda (1 - \sum q_j)$$

Минимум перекрестной энтропии

$$H(p,q) = - \sum p_j \ln q_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0; \quad \sum q_j = 1$$

$$\xi = - \sum p_j \ln q_j + \lambda (1 - \sum q_j)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial q_j} = 0; \quad -\frac{p_j}{q_j} - \lambda = 0; \quad q_j = -\frac{p_j}{\lambda}$$

Минимум перекрестной энтропии

$$H(p,q) = - \sum p_j \ln q_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0; \quad \sum q_j = 1$$

$$\xi = - \sum p_j \ln q_j + \lambda (1 - \sum q_j)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial q_j} = 0; \quad -\frac{p_j}{q_j} - \lambda = 0; \quad q_j = -\frac{p_j}{\lambda}$$

$$\sum q_j = - \sum p_j / \lambda = -1 / \lambda; \quad \lambda = -1$$

Минимум перекрестной энтропии

$$H(p,q) = - \sum p_j \ln q_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0; \quad \sum q_j = 1$$

$$\xi = - \sum p_j \ln q_j + \lambda (1 - \sum q_j)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial q_j} = 0; \quad -\frac{p_j}{q_j} - \lambda = 0; \quad q_j = -\frac{p_j}{\lambda}$$

$$\sum q_j = - \sum p_j / \lambda = -1 / \lambda; \quad \lambda = -1$$

$$q_j = p_j$$

Логистическая регрессия

$$\mathcal{L}_{\log} = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j$$

Логистическая регрессия

$$\mathcal{L}_{\log} = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j$$

Если точно известно, что объект принадлежит классу t ,
то $p_j = \delta(j,t)$ и $\mathcal{L}_{\log} = -\ln q_t$

Логистическая регрессия

$$\mathcal{L}_{\log} = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j$$

Если точно известно, что объект принадлежит классу t ,
то $p_j = \delta(j,t)$ и $\mathcal{L}_{\log} = -\ln q_t$

$$q_j = \text{softmax} \left(\sum_{i=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_i \right) = \frac{\exp \left(\sum_{i=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_i \right)}{\sum_{j=1}^s \exp \left(\sum_{i=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_i \right)}$$

Логистическая регрессия

$$\mathcal{L}_{\log} = -N \sum_{j=1}^s p_j \ln q_j$$

Если точно известно, что объект принадлежит классу t ,
то $p_j = \delta(j,t)$ и $\mathcal{L}_{\log} = -\ln q_t$

$$q_j = \text{softmax} \left(\sum_{i=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_i \right) = \frac{\exp \left(\sum_{i=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_i \right)}{\sum_{j=1}^s \exp \left(\sum_{i=1}^l \mathcal{X}_{ij} a_i \right)}$$

$$s = 2 : \quad q = \text{sigmoid} \left(\sum_{i=1}^l x_i a_i \right) \equiv \frac{1}{1 + \exp \left(\sum_{i=1}^l x_i a_i \right)}$$

Линейный классификатор

Параметры

$$\begin{matrix} \vec{x} \\ m \end{matrix}$$

Линейный классификатор

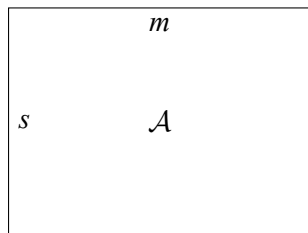
Матрица весов

Параметры

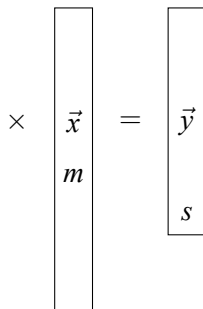
$$\begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline s \quad \mathcal{A} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \vec{x} \\ \hline m \\ \hline \end{array}$$

Линейный классификатор

Матрица весов

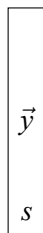


Параметры

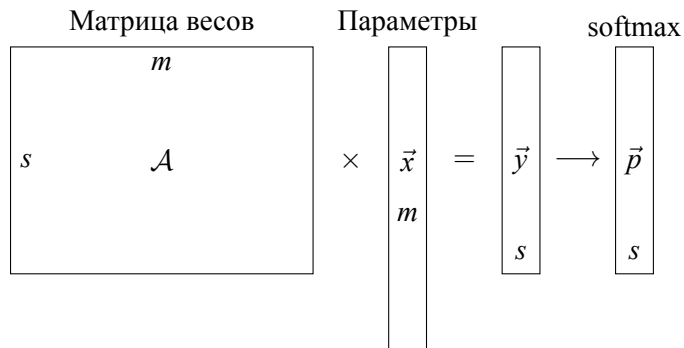


\times

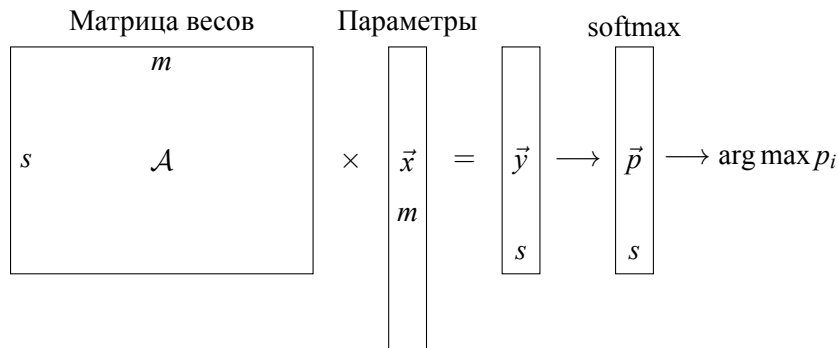
$=$



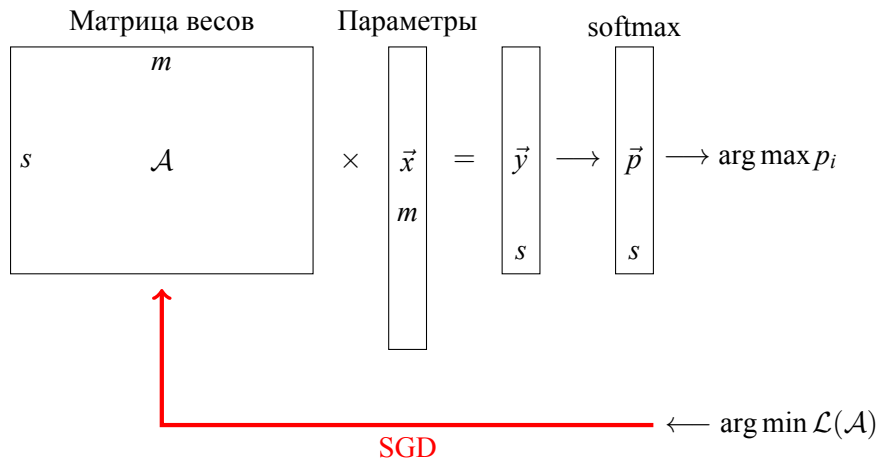
Линейный классификатор



Линейный классификатор



Линейный классификатор



Стохастический градиентный спуск (SGD)

$$\vec{p} = \text{softmax}(\mathcal{A}\vec{x})$$

Прямой проход: $\vec{p}_s = \text{softmax}(\mathcal{A}_{s-1}\vec{x}_1)$;

Стохастический градиентный спуск (SGD)

$$\vec{p} = \text{softmax}(\mathcal{A}\vec{x})$$

Прямой проход: $\vec{p}_s = \text{softmax}(\mathcal{A}_{s-1}\vec{x}_1)$; $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s) + \lambda^2 \mathcal{A}\mathcal{A}^T$

Стохастический градиентный спуск (SGD)

$$\vec{p} = \text{softmax}(\mathcal{A}\vec{x})$$

Прямой проход: $\vec{p}_s = \text{softmax}(\mathcal{A}_{s-1}\vec{x}_1)$; $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s) + \lambda^2 \mathcal{A}\mathcal{A}^T$

Обратный проход: $\mathcal{A} = \mathcal{A} - lr_s \cdot \nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s)$

Стохастический градиентный спуск (SGD)

$$\vec{p} = \text{softmax}(\mathcal{A}\vec{x})$$

Прямой проход: $\vec{p}_s = \text{softmax}(\mathcal{A}_{s-1}\vec{x}_1)$; $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s) + \lambda^2 \mathcal{A}\mathcal{A}^T$

Обратный проход: $\mathcal{A} = \mathcal{A} - lr_s \cdot \nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s)$

Корректировка скорости обучения lr_s

Стохастический градиентный спуск (SGD)

$$\vec{p} = \text{softmax}(\mathcal{A}\vec{x})$$

Прямой проход: $\vec{p}_s = \text{softmax}(\mathcal{A}_{s-1}\vec{x}_1)$; $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s) + \lambda^2 \mathcal{A}\mathcal{A}^T$

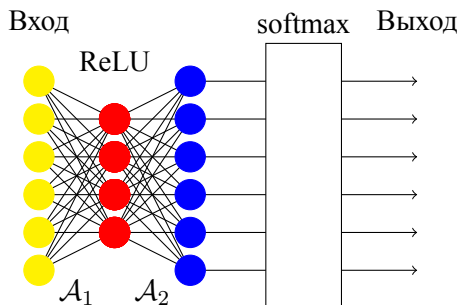
Обратный проход: $\mathcal{A} = \mathcal{A} - lr_s \cdot \nabla_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{\log}(\vec{p}_s, \vec{q}_s)$

Корректировка скорости обучения lr_s

Повторяем, пока функция потерь \mathcal{L}_s не станет ниже порога!

Введение нелинейной функции

$$\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$$



$$\vec{p} = \text{softmax}(\mathcal{A}_2 \cdot \text{ReLU}(\mathcal{A}_1 \vec{x}))$$

Метод моментов

Метод максимального правдоподобия в ряде случаев сложен

Метод моментов

Метод максимального правдоподобия в ряде случаев сложен

Пусть $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – неизвестные параметры

Метод моментов

Метод максимального правдоподобия в ряде случаев сложен

Пусть $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – неизвестные параметры

$$m_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k w(y | \vec{\theta}) dy - \text{начальные моменты}$$

$$\mu_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathcal{M}\{y\})^k w(y | \vec{\theta}) dy - \text{центральные моменты}$$

Метод моментов

Метод максимального правдоподобия в ряде случаев сложен

Пусть $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – неизвестные параметры

$m_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k w(y | \vec{\theta}) dy$ – начальные моменты

$\mu_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathcal{M}\{y\})^k w(y | \vec{\theta}) dy$ – центральные моменты

$\check{m}_k = \frac{1}{n} \sum y_j^k$ – выборочные начальные моменты $\check{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum (y_j - \hat{m}_1)^k$ –
выборочные центральные моменты

Метод моментов

Метод максимального правдоподобия в ряде случаев сложен

Пусть $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ – неизвестные параметры

$$m_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k w(y | \vec{\theta}) dy - \text{начальные моменты}$$

$$\mu_k(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathcal{M}\{y\})^k w(y | \vec{\theta}) dy - \text{центральные моменты}$$

$$\check{m}_k = \frac{1}{n} \sum y_j^k - \text{выборочные начальные моменты} \quad \check{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum (y_j - \hat{m}_1)^k - \text{выборочные центральные моменты}$$

$$\check{m}_k = m_k(\vec{\theta}_{\text{mom}}) \quad \text{или} \quad \check{\mu}_k = \mu_k(\vec{\theta}_{\text{mom}})$$

Метод моментов

Пример: гамма-распределение

$$w(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta); \quad x \geq 0; \beta > 0$$

Метод моментов

Пример: гамма-распределение

$$w(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta); \quad x \geq 0; \beta > 0$$

$$m_1 = \alpha\beta; \quad m_2 = \alpha(\alpha + 1)\beta^2; \quad \mu_2 = \alpha\beta^2; \quad \mu_3 = 2\alpha\beta^3$$

Метод моментов

Пример: гамма-распределение

$$w(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta); \quad x \geq 0; \beta > 0$$

$$m_1 = \alpha\beta; \quad m_2 = \alpha(\alpha + 1)\beta^2; \quad \mu_2 = \alpha\beta^2; \quad \mu_3 = 2\alpha\beta^3$$

$$m_1(\alpha, \beta) = \check{m}_1 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{n} \sum y_j \quad m_2(\alpha, \beta) = \check{m}_2 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1)\beta^2 = \frac{1}{n} \sum y_j^2$$

Метод моментов

Пример: гамма-распределение

$$w(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta); \quad x \geq 0; \beta > 0$$

$$m_1 = \alpha\beta; \quad m_2 = \alpha(\alpha + 1)\beta^2; \quad \mu_2 = \alpha\beta^2; \quad \mu_3 = 2\alpha\beta^3$$

$$m_1(\alpha, \beta) = \check{m}_1 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{n} \sum y_j \quad m_2(\alpha, \beta) = \check{m}_2 \Rightarrow \alpha(\alpha + 1)\beta^2 = \frac{1}{n} \sum y_j^2$$

$$\hat{\alpha}_{\text{mom}} = \frac{\check{m}_1^2}{\check{m}_2 - \check{m}_1^2}; \quad \hat{\beta}_{\text{mom}} = \frac{\check{m}_2 - \check{m}_1^2}{\check{m}_1}$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

$$w(y_j|\theta) = \begin{cases} 1/\theta; & 0 \leq y_j \leq \theta \\ 0; & y_j < 0; y_j > \theta \end{cases}$$

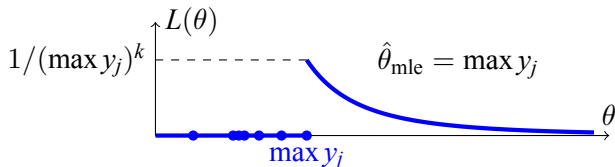
Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

$$w(y_j|\theta) = \begin{cases} 1/\theta; & 0 \leq y_j \leq \theta \\ 0; & y_j < 0; y_j > \theta \end{cases}$$

Метод максимального правдоподобия

$$L(\theta) = \prod w(y_j|\theta) = \begin{cases} 1/\theta^k; & 0 \leq y_1, y_2, \dots, y_k \leq \theta \\ 0; & \exists t : y_t < 0; y_t > \theta \end{cases}$$



Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x)$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x)$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x) = \prod P(y_j < x)$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x) = \prod P(y_j < x) = x^k / \theta^k$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x) = \prod P(y_j < x) = x^k / \theta^k$$

$$w(x) = \frac{dF}{dx} = kx^{k-1} / \theta^k$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x) = \prod P(y_j < x) = x^k / \theta^k$$

$$w(x) = \frac{dF}{dx} = kx^{k-1} / \theta^k$$

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y}) \right\} = \int_0^{\infty} x w(x) dx = \frac{k}{k+1} \theta$$

Значит, оценка $\hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y})$ – смещенная!

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x) = \prod P(y_j < x) = x^k / \theta^k$$

$$w(x) = \frac{dF}{dx} = kx^{k-1} / \theta^k$$

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y}) \right\} = \int_0^\infty x w(x) dx = \frac{k}{k+1} \theta$$

Значит, оценка $\hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y})$ – смещенная!

$$\text{Несмещенная оценка } \hat{\theta}_{\text{mle-nobias}}(\vec{y}) = \frac{k}{k+1} \max y_j$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Функция распределения

$$F(x) = P(X < x) = P(\max y_j < x) = \prod P(y_j < x) = x^k / \theta^k$$

$$w(x) = \frac{dF}{dx} = kx^{k-1} / \theta^k$$

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y}) \right\} = \int_0^{\infty} x w(x) dx = \frac{k}{k+1} \theta$$

Значит, оценка $\hat{\theta}_{\text{mle}}(\vec{y})$ – смещенная!

$$\text{Несмещенная оценка } \hat{\theta}_{\text{mle-nobias}}(\vec{y}) = \frac{k}{k+1} \max y_j$$

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}_{\text{mle-nobias}}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} = \frac{\theta^2}{k(k+2)}$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Метод моментов

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Метод моментов

$$m_1(\theta) = \frac{\theta}{2}; \quad \frac{1}{k} \sum y_j = \frac{\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y})}{2}$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Метод моментов

$$m_1(\theta) = \frac{\theta}{2}; \quad \frac{1}{k} \sum y_j = \frac{\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y})}{2}$$

$$\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y}) = \frac{2}{k} \sum y_j$$

Метод моментов и метод максимального правдоподобия

Пример: шарик в ящике

Метод моментов

$$m_1(\theta) = \frac{\theta}{2}; \quad \frac{1}{k} \sum y_j = \frac{\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y})}{2}$$

$$\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y}) = \frac{2}{k} \sum y_j$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}_{\text{mom}}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} &= \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{2}{k} \sum y_j - \theta \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{\theta^2}{3k} = \frac{\theta^2}{k(k+2)} \cdot \frac{k+2}{3} > \frac{\theta^2}{k(k+2)} \end{aligned}$$

Лекция 10. Рекуррентные оценки. Фильтр Калмана

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Дискретная полиномиальная модель

Модель k -го порядка: $f[j] = \alpha_0 + \alpha_1 j + \dots + \alpha_k j^k$

Дискретная полиномиальная модель

Модель k -го порядка: $f[j] = \alpha_0 + \alpha_1 j + \dots + \alpha_k j^k$

Модель 2-го порядка: $f[j] = x_0 + v_0 j + \frac{g j^2}{2}$

Дискретная полиномиальная модель

Модель k -го порядка: $f[j] = \alpha_0 + \alpha_1 j + \dots + \alpha_k j^k$

Модель 2-го порядка: $f[j] = x_0 + v_0 j + \frac{g j^2}{2}$

$$\begin{cases} f[j] = f[j-1] + v[j-1] \\ v[j] = v[j-1] + g[j-1] \\ g[j] = \rho g[j-1] + \xi[j] \end{cases}$$

Дискретная полиномиальная модель

Модель k -го порядка: $f[j] = \alpha_0 + \alpha_1 j + \dots + \alpha_k j^k$

Модель 2-го порядка: $f[j] = x_0 + v_0 j + \frac{g j^2}{2}$

$$\begin{cases} f[j] = f[j-1] + v[j-1] \\ v[j] = v[j-1] + g[j-1] \\ g[j] = \rho g[j-1] + \xi[j] \end{cases}$$

Пусть $\vec{x}[j] = \begin{pmatrix} f[j] \\ v[j] \\ g[j] \end{pmatrix}$; $\vec{\xi}[j] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi[j] \end{pmatrix}$, тогда

$$\vec{x}[j] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \vec{x}[j-1] + \vec{\xi}[j]$$

Рекуррентная оценка

Модель: $x[j] = \rho[j - 1] \cdot x[j - 1] + \xi[j]$

В эксперименте наблюдаются значения $y[j] = x[j] + n[j]$, где $n[j]$ – белый шум

Рекуррентная оценка

Модель: $x[j] = \rho[j - 1] \cdot x[j - 1] + \xi[j]$

В эксперименте наблюдаются значения $y[j] = x[j] + n[j]$, где $n[j]$ – белый шум

Рекуррентная оценка: $\hat{x}[j] = \hat{x}(\hat{x}[j - 1], y[j])$

Рекуррентная оценка

Модель: $x[j] = \rho[j-1] \cdot x[j-1] + \xi[j]$

В эксперименте наблюдаются значения
 $y[j] = x[j] + n[j]$, где $n[j]$ – белый шум

Рекуррентная оценка: $\hat{x}[j] = \hat{x}(\hat{x}[j-1], y[j])$

Известна оценка $\hat{x}[j-1]$ предыдущего шага
Известна ее дисперсия $P[k-1] = \mathcal{M} \{ \epsilon^2[j-1] \}$;

$$\epsilon[j-1] = \hat{x}[j-1] - x[j-1]$$

Рекуррентная оценка

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Нужно подобрать такие $A[j]$ и $B[j]$, чтобы дисперсия $\mathcal{M} \{ \epsilon^2[j] \} \rightarrow \min$

Рекуррентная оценка

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Нужно подобрать такие $A[j]$ и $B[j]$, чтобы дисперсия $\mathcal{M} \{ \epsilon^2[j] \} \rightarrow \min$

$$\epsilon[j] = \hat{x}[j] - x[j]$$

Рекуррентная оценка

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Нужно подобрать такие $A[j]$ и $B[j]$, чтобы дисперсия $\mathcal{M} \{ \epsilon^2[j] \} \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} \epsilon[j] &= \hat{x}[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j] - x[j] \end{aligned}$$

Рекуррентная оценка

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Нужно подобрать такие $A[j]$ и $B[j]$, чтобы дисперсия $\mathcal{M} \{ \epsilon^2[j] \} \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} \epsilon[j] &= \hat{x}[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot (x[j] + n[j]) - x[j] \end{aligned}$$

Рекуррентная оценка

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Нужно подобрать такие $A[j]$ и $B[j]$, чтобы дисперсия $\mathcal{M} \{ \epsilon^2[j] \} \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} \epsilon[j] &= \hat{x}[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot (x[j] + n[j]) - x[j] = \\ &= A[j] \cdot (x[j-1] + \epsilon[j-1]) + (B[j] - 1) \cdot x[j] + B[j] \cdot n[j] \end{aligned}$$

Рекуррентная оценка

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Нужно подобрать такие $A[j]$ и $B[j]$, чтобы дисперсия $\mathcal{M}\{\epsilon^2[j]\} \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} \epsilon[j] &= \hat{x}[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j] - x[j] = \\ &= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot (x[j] + n[j]) - x[j] = \\ &= A[j] \cdot (x[j-1] + \epsilon[j-1]) + (B[j] - 1) \cdot x[j] + B[j] \cdot n[j] = \\ &= A[j] \cdot (x[j-1] + \epsilon[j-1]) + (B[j] - 1) \cdot (\rho[j-1] \cdot x[j-1] + \xi[j]) + B[j] \cdot n[j] \end{aligned}$$

Рекуррентная оценка

$$\hat{x}[j] = \hat{x}[j](\hat{x}[j-1], y[j]) = A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j]$$

Нужно подобрать такие $A[j]$ и $B[j]$, чтобы дисперсия $\mathcal{M} \{ \epsilon^2[j] \} \rightarrow \min$

$$\epsilon[j] = \hat{x}[j] - x[j] =$$

$$= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot y[j] - x[j] =$$

$$= A[j] \cdot \hat{x}[j-1] + B[j] \cdot (x[j] + n[j]) - x[j] =$$

$$= A[j] \cdot (x[j-1] + \epsilon[j-1]) + (B[j] - 1) \cdot x[j] + B[j] \cdot n[j] =$$

$$= A[j] \cdot (x[j-1] + \epsilon[j-1]) + (B[j] - 1) \cdot (\rho[j-1] \cdot x[j-1] + \xi[j]) + B[j] \cdot n[j] =$$

$$= \underbrace{(A[j] + (B[j] - 1) \cdot \rho[j-1]) \cdot x[j-1]}_{\text{Положим равным 0: } A[j] = (1 - B[j]) \cdot \rho[j-1]} +$$

$$+ \underbrace{A[j] \cdot \epsilon[j-1]}_{\text{Ошибка предыдущего шага}} + \underbrace{(B[j] - 1) \cdot \xi[j]}_{\text{Динамика случайного процесса}} + \underbrace{B[j] \cdot n[j]}_{\text{Помеха при измерениях}}$$

Рекуррентная оценка

$$\epsilon[j] = (1 - B[j]) \cdot \rho[j-1] \cdot \epsilon[j-1] + (B[j] - 1) \cdot \xi[j] + B[j] \cdot n[j]$$

Это сумма трех независимых случайных величин

$$\begin{aligned} P[j] &= \mathcal{M} \{ \epsilon[j] \} = \\ &= (1 - B[j])^2 \cdot \rho^2[j-1] \cdot P[j-1] + (B[j] - 1)^2 \cdot \underbrace{\mathcal{M} \{ \xi^2[j] \}}_{=V_\xi[j]} + B^2[j] \cdot \underbrace{\mathcal{M} \{ n^2[j] \}}_{=V[n]} \end{aligned}$$

$$P[j] \rightarrow \min$$

Фильтр Калмана

Решение: $B[j] = P[j]/V[j]$

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{\text{ex}}[j] = \rho^2[j-1] \cdot P[j-1] + V_{\xi}[j] & - \text{экстраполяция дисперсии} \\ \hat{x}_{\text{ex}}[j] = \rho[j-1] \cdot \hat{x}[j-1] & - \text{экстраполяция оценки} \\ \hat{P}[j] = \frac{P_{\text{ex}}[j]}{1 + P_{\text{ex}}[j]/V[j]} & - \text{новая дисперсия} \\ \hat{x}[j] = \hat{x}_{\text{ex}}[j] + \frac{P[j]}{V[j]}(y[j] - \hat{x}_{\text{ex}}[j]) & - \text{новая оценка} \end{array} \right.$$

Фильтр Калмана

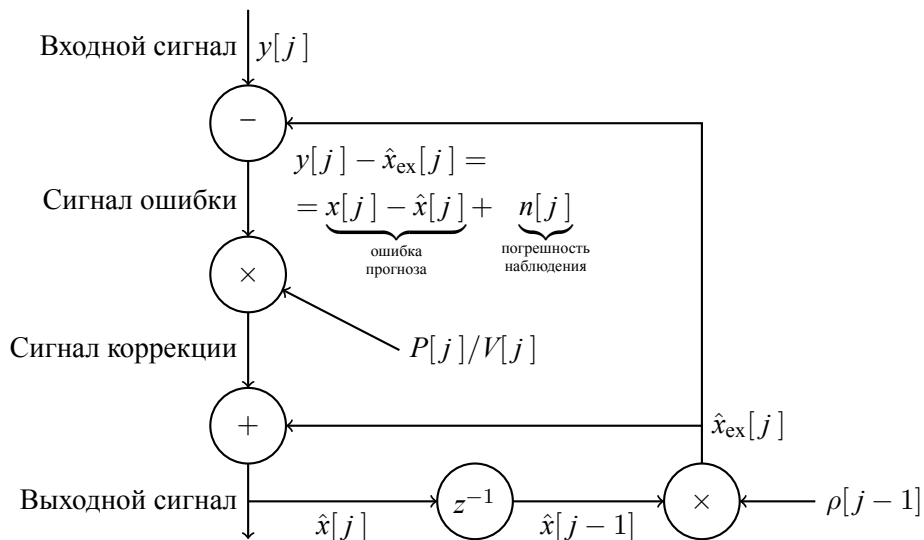
Решение: $B[j] = P[j]/V[j]$

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_{\text{ex}}[j] = \rho^2[j-1] \cdot P[j-1] + V_{\xi}[j] & \text{– экстраполяция дисперсии} \\ \hat{x}_{\text{ex}}[j] = \rho[j-1] \cdot \hat{x}[j-1] & \text{– экстраполяция оценки} \\ \hat{P}[j] = \frac{P_{\text{ex}}[j]}{1 + P_{\text{ex}}[j]/V[j]} & \text{– новая дисперсия} \\ \hat{x}[j] = \hat{x}_{\text{ex}}[j] + \frac{P[j]}{V[j]}(y[j] - \hat{x}_{\text{ex}}[j]) & \text{– новая оценка} \end{array} \right.$$

Начальные условия алгоритма: до наблюдения $y[1]$ неизвестно; $x[1]$ – случайная величина со средним 0 и дисперсией $V_x[1] = \mathcal{M} \{x^2[1]\}$

$$\Rightarrow \hat{x}_{\text{ex}}[1] = 0; \quad P_{\text{ex}}[1] = V_x[1] \Rightarrow \hat{P}[1] = \frac{V_x[1]}{1 + V_x[1]/V[1]} \dots$$

Фильтр Калмана



Лекция 11. Критерии качества оценок

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Критерии оценок параметра

- Несмещенность: $\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \theta$

Критерии оценок параметра

- Несмещенность: $\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \theta$
- Состоятельность: $\lim_{n \rightarrow \infty} p \left(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon \right) = 0$

Критерии оценок параметра

- Несмещенность: $\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \theta$
- Состоятельность: $\lim_{n \rightarrow \infty} p \left(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon \right) = 0$
- Эффективность: $\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}_{eff} - \theta)^2 \right\} \leq \mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta} - \theta)^2 \right\}$

Минимально возможная дисперсия оценки

Пусть границы множества $\{\vec{y} | w(\vec{y} | \theta) > 0\}$ не зависят от θ

Минимально возможная дисперсия оценки

Пусть границы множества $\{\vec{y} | w(\vec{y} | \theta) > 0\}$ не зависят от θ Пусть $\hat{\theta}(\vec{y})$ – несмещенная оценка параметра θ

Минимально возможная дисперсия оценки

Пусть границы множества $\{\vec{y} | w(\vec{y} | \theta) > 0\}$ не зависят от θ Пусть $\hat{\theta}(\vec{y})$ – несмещенная оценка параметра θ

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) w(\vec{y} | \theta) d\vec{y} = \theta$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Пусть границы множества $\{\vec{y} | w(\vec{y}|\theta) > 0\}$ не зависят от θ Пусть $\hat{\theta}(\vec{y})$ – несмещенная оценка параметра θ

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} d\vec{y} = 1$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Пусть границы множества $\{\vec{y} | w(\vec{y}|\theta) > 0\}$ не зависят от θ Пусть $\hat{\theta}(\vec{y})$ – несмещенная оценка параметра θ

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} d\vec{y} = 1$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Пусть границы множества $\{\vec{y} | w(\vec{y}|\theta) > 0\}$ не зависят от θ Пусть $\hat{\theta}(\vec{y})$ – несмещенная оценка параметра θ

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} d\vec{y} = 1$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Пусть границы множества $\{\vec{y} | w(\vec{y}|\theta) > 0\}$ не зависят от θ Пусть $\hat{\theta}(\vec{y})$ – несмещенная оценка параметра θ

$$\mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{M} \left\{ \hat{\theta}(\vec{y}) \right\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} d\vec{y} = 1$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 0$$

Минимально возможная дисперсия оценки

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1 \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 0$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

Минимально возможная дисперсия оценки

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta}(\vec{y}) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1 \quad \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 0$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} w(\vec{y}|\theta) d\vec{y} = 1$$

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \cdot \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right\} = 1$$

Это ковариация двух случайных величин: $(\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$ и $\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta}$.

Минимально возможная дисперсия оценки

Неравенство Рао-Крамера

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \cdot \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right\} = 1$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Неравенство Рао-Крамера

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \cdot \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right\} = 1$$

$$\sqrt{\underbrace{\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\}}_{\text{Дисперсия оценки}} \cdot \underbrace{\mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}}_{\equiv I(\theta) - \text{информация в выборке}}} \geq 1$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Неравенство Рао-Крамера

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta) \cdot \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right\} = 1$$

$$\sqrt{\underbrace{\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\}}_{\text{Дисперсия оценки}} \cdot \underbrace{\mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}}_{\equiv I(\theta) - \text{информация в выборке}}} \geq 1$$

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{1}{I(\theta)}; \quad I(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Независимые наблюдения

$$\ln w(\vec{y}|\theta) = \ln \prod w(y_j|\theta) = \sum \ln w(y_j|\theta)$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Независимые наблюдения

$$\ln w(\vec{y}|\theta) = \ln \prod w(y_j|\theta) = \sum \ln w(y_j|\theta)$$

$$I(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = \mathcal{M} \left\{ \left(\sum \frac{\partial \ln w(y_j|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Независимые наблюдения

$$\ln w(\vec{y}|\theta) = \ln \prod w(y_j|\theta) = \sum \ln w(y_j|\theta)$$

$$I(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = \mathcal{M} \left\{ \left(\sum \frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Но $\mathcal{M} \left\{ \frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right\} = 0$, дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$I(\theta) = \sum I_j(\theta); \quad I_j(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Минимально возможная дисперсия оценки

Независимые наблюдения

$$\ln w(\vec{y}|\theta) = \ln \prod w(y_j|\theta) = \sum \ln w(y_j|\theta)$$

$$I(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = \mathcal{M} \left\{ \left(\sum \frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Но $\mathcal{M} \left\{ \frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right\} = 0$, дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$I(\theta) = \sum I_j(\theta); \quad I_j(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{\partial \ln w(\vec{y}_j|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

Если все распределения одинаковы, то $I(\theta) = nI_1(\theta)$ и

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{n}{I_1(\theta)}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Если $\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} = \frac{1}{I(\theta)}$, то оценка $\hat{\theta}$ является эффективной

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$. Найти θ .

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение

задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$. Найти θ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} = \frac{y_j - \theta}{\sigma^2}$;

$$I_1(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \frac{(y_j - \theta)^2}{\sigma^4} \right\} = \frac{1}{\sigma^2}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение

задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$. Найти θ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} = \frac{y_j - \theta}{\sigma^2}$;

$$I_1(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \frac{(y_j - \theta)^2}{\sigma^4} \right\} = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$I(\theta) = kI_1 = \frac{k}{\sigma^2} \Rightarrow \mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{\sigma^2}{k}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение

задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - \theta)^2}{2\sigma^2}\right)$. Найти θ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} = \frac{y_j - \theta}{\sigma^2}$;

$$I_1(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \frac{(y_j - \theta)^2}{\sigma^4} \right\} = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$I(\theta) = kI_1 = \frac{k}{\sigma^2} \Rightarrow \mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{\sigma^2}{k}$$

Например, оценка $\hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{1}{k} \sum y_j$ имеет дисперсию

$$\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{1}{k} \sum (y_j - \theta) \right)^2 \right\} = \frac{1}{k^2} \sum (y_j - \theta)^2 = \frac{\sigma^2}{k}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$. Найти λ .

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$. Найти λ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - y_j$;

$$I_1(\lambda) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} - y_j \right)^2 \right\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$. Найти λ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - y_j$;

$$I_1(\lambda) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} - y_j \right)^2 \right\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$I(\lambda) = kI_1 = \frac{k}{\lambda^2} \Rightarrow \mathcal{M} \left\{ (\hat{\lambda}(\vec{y}) - \lambda)^2 \right\} \geq \frac{\lambda^2}{k}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$. Найти λ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - y_j$;

$$I_1(\lambda) = \mathcal{M} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} - y_j \right)^2 \right\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$I(\lambda) = kI_1 = \frac{k}{\lambda^2} \Rightarrow \mathcal{M} \left\{ (\hat{\lambda}(\vec{y}) - \lambda)^2 \right\} \geq \frac{\lambda^2}{k}$$

Оценка $\hat{\lambda}(\vec{y}) = \frac{k-1}{\sum y_j}$ имеет дисперсию $\mathcal{M} \left\{ (\hat{\lambda}(\vec{y}) - \lambda)^2 \right\} = \frac{\lambda^2}{k-2} > \frac{\lambda^2}{k}$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y_j}{\theta}\right)$. Найти θ .

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y_j}{\theta}\right)$. Найти θ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{y_j}{\theta^2} = \frac{y_j - \theta}{\theta^2}$;

$$I_1(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \frac{(y_j - \theta)^2}{\theta^4} \right\} = \frac{1}{\theta^2}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y_j}{\theta}\right)$. Найти θ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{y_j}{\theta^2} = \frac{y_j - \theta}{\theta^2}$;

$$I_1(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \frac{(y_j - \theta)^2}{\theta^4} \right\} = \frac{1}{\theta^2}$$

$$I(\theta) = kI_1 = \frac{k}{\theta^2} \Rightarrow \mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{\theta^2}{k}$$

Неравенство Рао-Крамера и эффективность оценки

Примеры

В эксперименте получены значения $\vec{y} = y_1, y_2, \dots, y_k$. Распределение задано как $w(y_j|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y_j}{\theta}\right)$. Найти θ .

Информация в одном наблюдении $\frac{\partial \ln w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{y_j}{\theta^2} = \frac{y_j - \theta}{\theta^2}$;

$$I_1(\theta) = \mathcal{M} \left\{ \frac{(y_j - \theta)^2}{\theta^4} \right\} = \frac{1}{\theta^2}$$

$$I(\theta) = kI_1 = \frac{k}{\theta^2} \Rightarrow \mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} \geq \frac{\theta^2}{k}$$

Оценка $\hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\sum y_j}{k}$ имеет дисперсию $\mathcal{M} \left\{ (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)^2 \right\} = \frac{\theta^2}{k}$

Неравенство Рао-Крамера

Переход в равенство

Равенство достигается, если случайные величины $x_1 = (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$ и $x_2 = \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta}$ линейно зависимы.

Неравенство Рао-Крамера

Переход в равенство

Равенство достигается, если случайные величины $x_1 = (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$ и $x_2 = \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta}$ линейно зависимы.

$$\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} = \alpha(\theta) \cdot (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$$

Неравенство Рао-Крамера

Переход в равенство

Равенство достигается, если случайные величины $x_1 = (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$ и $x_2 = \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta}$ линейно зависимы.

$$\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} = \alpha(\theta) \cdot (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$$

$w(\vec{y}|\theta) = \exp(A(\theta)\hat{\theta}(\vec{y}) + B(\theta) + C(\vec{y}))$, где
 $A(\theta) = \int \alpha(\theta)d\theta$; $B(\theta) = -\int \theta\alpha(\theta)d\theta$; $C(\vec{y})$ – произвольная функция

Неравенство Рао-Крамера

Переход в равенство

Равенство достигается, если случайные величины $x_1 = (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$ и $x_2 = \frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta}$ линейно зависимы.

$$\frac{\partial \ln w(\vec{y}|\theta)}{\partial \theta} = \alpha(\theta) \cdot (\hat{\theta}(\vec{y}) - \theta)$$

$w(\vec{y}|\theta) = \exp(A(\theta)\hat{\theta}(\vec{y}) + B(\theta) + C(\vec{y}))$, где
 $A(\theta) = \int \alpha(\theta)d\theta$; $B(\theta) = -\int \theta\alpha(\theta)d\theta$; $C(\vec{y})$ – произвольная функция

Тогда $\hat{\theta}(\vec{y})$ – эффективная оценка параметра $\theta = -\frac{B'(\theta)}{A'(\theta)}$.

Неравенство Рао-Крамера

Примеры перехода в равенство

Распределение задано как $w(y_j|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - a)^2}{2\sigma^2}\right)$.

σ – неизвестный параметр.

Неравенство Рао-Крамера

Примеры перехода в равенство

Распределение задано как $w(y_j|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - a)^2}{2\sigma^2}\right)$.
 σ – неизвестный параметр.

$$w(\vec{y}|\sigma) = \prod w(y_j|\sigma) = \exp\left(\underbrace{-\frac{k}{2\sigma^2}}_{A(\sigma)} \cdot \underbrace{\frac{\sum (y_j - a)^2}{k}}_{\hat{\theta}(\vec{y})} \underbrace{-k \ln \sigma}_{B(\sigma)} \underbrace{-\frac{k \ln 2\pi}{2}}_{C(\vec{y})}\right)$$

Неравенство Рао-Крамера

Примеры перехода в равенство

Распределение задано как $w(y_j|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_j - a)^2}{2\sigma^2}\right)$.
 σ – неизвестный параметр.

$$w(\vec{y}|\sigma) = \prod w(y_j|\sigma) = \exp\left(\underbrace{-\frac{k}{2\sigma^2}}_{A(\sigma)} \cdot \underbrace{\frac{\sum(y_j - a)^2}{k}}_{\hat{\theta}(\vec{y})} \underbrace{-k \ln \sigma}_{B(\sigma)} \underbrace{-\frac{k \ln 2\pi}{2}}_{C(\vec{y})}\right)$$

Значит, $\hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\sum(y_j - a)^2}{k}$ – эффективная оценка $\theta = -\frac{B'}{A'} = \sigma^2$

Неравенство Рао-Крамера

Примеры перехода в равенство

Распределение задано как $w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$.
 λ – неизвестный параметр.

Неравенство Рао-Крамера

Примеры перехода в равенство

Распределение задано как $w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$.
 λ – неизвестный параметр.

$$w(\vec{y}|\lambda) = \prod w(y_j|\lambda) = \exp \left(\underbrace{-k\lambda}_{A(\lambda)} \cdot \underbrace{\frac{\sum y_j}{k}}_{\hat{\theta}(\vec{y})} + \underbrace{k \ln \lambda}_{B(\lambda)} \right)$$

Неравенство Рао-Крамера

Примеры перехода в равенство

Распределение задано как $w(y_j|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y_j)$.
 λ – неизвестный параметр.

$$w(\vec{y}|\lambda) = \prod w(y_j|\lambda) = \exp \left(\underbrace{-k\lambda}_{A(\lambda)} \cdot \underbrace{\frac{\sum y_j}{k}}_{\hat{\theta}(\vec{y})} + \underbrace{k \ln \lambda}_{B(\lambda)} \right)$$

Значит, $\hat{\theta}(\vec{y}) = \frac{\sum y_j}{k}$ – эффективная оценка $\theta = -\frac{B'}{A'} = \frac{1}{\lambda}$

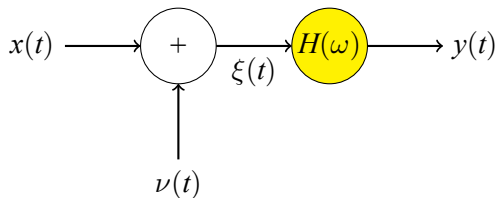
Лекция 12. Винеровская фильтрация

Теория и практика обработки сигналов и полей

Дмитриев Константин Вячеславович

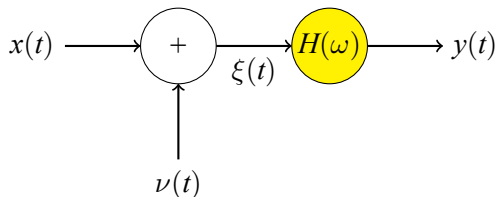
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Фильтрующая линейная система



На входе фильтра сигнал $\xi(t) = x(t) + \nu(t)$

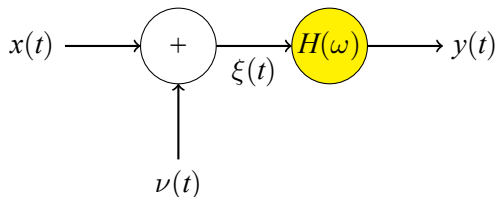
Фильтрующая линейная система



На входе фильтра сигнал $\xi(t) = x(t) + \nu(t)$

Задача – создать фильтр с минимальной ошибкой $\Delta(t) = y(t) - x(t)$

Фильтрующая линейная система



На входе фильтра сигнал $\xi(t) = x(t) + \nu(t)$

Задача – создать фильтр с минимальной ошибкой $\Delta(t) = y(t) - x(t)$

Определение 13.1

Фильтр Колмогорова-Винера — фильтр, минимизирующий средний квадрат ошибки $\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \mathcal{M} \{ (y(t) - x(t))^2 \}$

Корреляционные функции

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt'; \quad h(t) - \text{импульсная функция отклика фильтра}$$

Корреляционные функции

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt'; \quad h(t) - \text{импульсная функция отклика фильтра}$$

$B_x(\tau) = \mathcal{M} \{x(t)x(t+\tau)\}$ – к.ф. оцениваемого сигнала

$B_\xi(\tau) = \mathcal{M} \{\xi(t)\xi(t+\tau)\}$ – к.ф. входного сигнала

$B_{\xi x}(\tau) = \mathcal{M} \{\xi(t)x(t+\tau)\}$ – к.ф. входного и оцениваемого сигнала

Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \mathcal{M} \{ (y(t) - x(t))^2 \} = \\
 &= \mathcal{M} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t') \xi(t-t') dt' - x(t) \right)^2 \right\} = \\
 &= \mathcal{M} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') \xi(t-t') \xi(t-t'') \right\} - \\
 &\quad - 2 \mathcal{M} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') \xi(t-t') x(t) \right\} + \mathcal{M} \{ x^2(t) \}
 \end{aligned}$$

Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') \mathcal{M} \{ \xi(t-t') \xi(t-t'') \} - \\
&- 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') \mathcal{M} \{ \xi(t-t') x(t) \} + \mathcal{M} \{ x^2(t) \} = \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') B_{\xi}(t' - t'') - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') B_{\xi x}(t') + B_x(0)
\end{aligned}$$

Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') \mathcal{M} \{ \xi(t-t') \xi(t-t'') \} - \\
 &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') \mathcal{M} \{ \xi(t-t') x(t) \} + \mathcal{M} \{ x^2(t) \} = \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') B_{\xi}(t' - t'') - 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') B_{\xi x}(t') + B_x(0)
 \end{aligned}$$

Среднеквадратичная ошибка зависит только от корреляционных функций, но не от “тонкой структуры” сигнала

Оценка среднеквадратичной ошибки

Пусть $\mathbb{F}\{h(t)\} = H(\omega)$

Теорема Винера-Хинчина: $\mathbb{F}\{B(\tau)\} = G(\omega)$

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') B_{\xi}(t' - t'') &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' d\omega h(t') h(t'') \cdot G_{\xi}(\omega) e^{i\omega(t' - t'')} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') e^{i\omega t'} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' h(t'') e^{-i\omega t''} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Оценка среднеквадратичной ошибки

Пусть $\mathbb{F}\{h(t)\} = H(\omega)$

Теорема Винера-Хинчина: $\mathbb{F}\{B(\tau)\} = G(\omega)$

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} dt dt' h(t)h(t')B_{\xi}(t-t') &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} dt dt' d\omega h(t)h(t') \cdot G_{\xi}(\omega) e^{i\omega(t-t')} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt h(t) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' h(t') e^{-i\omega t'} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt h(t) B_{\xi x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)}; \quad B_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_x(\omega)$$

Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\left[G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 - 2G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)} + G_x(\omega) \right]}_{A(\omega)}$$

Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\left[G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 - 2G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)} + G_x(\omega) \right]}_{A(\omega)}$$

$$G_{\xi x} = \overline{G_{x\xi}} \text{ и } G_{\xi x} \overline{H(\omega)} \in \Re$$

$$\Rightarrow 2G_{\xi x} \overline{H(\omega)} = G_{\xi x} \overline{H(\omega)} + \overline{G_{\xi x} \overline{H(\omega)}} = G_{\xi x} \overline{H(\omega)} + G_{x\xi} H(\omega)$$

Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\left[G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 - 2G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)} + G_x(\omega) \right]}_{A(\omega)}$$

$$G_{\xi x} = \overline{G_{x\xi}} \text{ и } G_{\xi x} \overline{H(\omega)} \in \Re$$

$$\Rightarrow 2G_{\xi x} \overline{H(\omega)} = G_{\xi x} \overline{H(\omega)} + \overline{G_{\xi x} \overline{H(\omega)}} = G_{\xi x} \overline{H(\omega)} + G_{x\xi} H(\omega)$$

$$\text{Пусть } |F(\omega)|^2 = G_{\xi}(\omega)$$

Оценка среднеквадратичной ошибки

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\left[G_{\xi}(\omega) |H(\omega)|^2 - 2G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)} + G_x(\omega) \right]}_{A(\omega)}$$

$$G_{\xi x} = \overline{G_{x\xi}} \text{ и } G_{\xi x} \overline{H(\omega)} \in \Re$$

$$\Rightarrow 2G_{\xi x} \overline{H(\omega)} = G_{\xi x} \overline{H(\omega)} + \overline{G_{\xi x} H(\omega)} = G_{\xi x} \overline{H(\omega)} + G_{x\xi} H(\omega)$$

$$\text{Пусть } |F(\omega)|^2 = G_{\xi}(\omega)$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |F(\omega)H(\omega)|^2 - G_{\xi x}(\omega) \overline{H(\omega)} - G_{x\xi}(\omega) H(\omega) + G_x(\omega) + \\ &+ \left| \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right|^2 - \left| \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right|^2 = \left| F(\omega)H(\omega) - \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right|^2 + G_x(\omega) - \frac{|G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_{\xi}(\omega)} \end{aligned}$$

Минимум среднеквадратичной ошибки

$$\min A(\omega) = G_x(\omega) - \frac{|G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_\xi(\omega)} \quad \text{при} \quad \left| F(\omega)H(\omega) - \frac{G_{\xi x}(\omega)}{F(\omega)} \right| = 0$$

$$\text{Тогда } H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{G_{\xi x}(\omega)}{G_\xi(\omega)}$$

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_\xi(\omega) - |G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_\xi(\omega)}$$

Уравнение Винера-Хопфа

$$H_{\text{opt}}(\omega)G_{\xi}(\omega) = G_{\xi x}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt h_{\text{opt}}(t)B_{\xi}(\tau - t) = B_{\xi x}(\tau)$$

Известные спектры сигнала и помехи

Спектр мощности сигнала $G_x(\omega)$ и помехи $G_\nu(\omega)$

$$\xi(t) = x(t) + \nu(t)$$

$$\begin{aligned} B_\xi(\tau) &= \mathcal{M} \{ \xi(t)\xi(t+\tau) \} = \mathcal{M} \{ (x(t) + \nu(t))(x(t+\tau) + \nu(t+\tau)) \} = \\ &= B_x(\tau) + B_{x\nu}(\tau) + B_{\nu x}(\tau) + B_\nu(\tau) \end{aligned}$$

$$G_\xi(\omega) = G_x(\omega) + G_{x\nu}(\omega) + G_{\nu x}(\omega) + G_\nu(\omega)$$

$$G_{\xi x}(\omega) = G_x(\omega) + G_{\nu x}(\omega)$$

$$G_{x\xi}(\omega) = G_x(\omega) + G_{x\nu}(\omega)$$

Известные спектры сигнала и помехи

В общем случае $H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega) + G_{x\nu}(\omega)}{G_x(\omega) + G_{x\nu}(\omega) + G_{\nu x}(\omega) + G_\nu(\omega)}$

Известные спектры сигнала и помехи

В общем случае $H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega) + G_{x\nu}(\omega)}{G_x(\omega) + G_{x\nu}(\omega) + G_{\nu x}(\omega) + G_\nu(\omega)}$

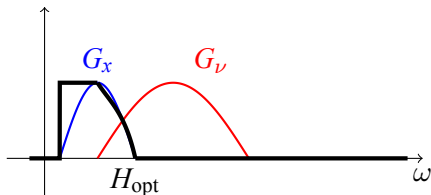
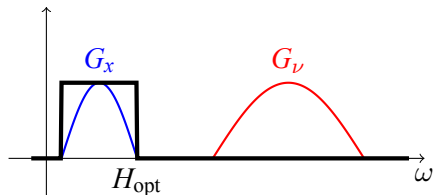
Если сигнал и помеха независимы, то $G_{\nu x}(\omega) = 0$ и $G_{x\nu}(\omega) = 0$

$$H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_\nu(\omega)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_\xi(\omega) - |G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_\xi(\omega)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)(G_x(\omega) + G_\nu(\omega)) - |G_x(\omega)|^2}{G_x(\omega) + G_\nu(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_\nu(\omega)}{G_x(\omega) + G_\nu(\omega)} \end{aligned}$$

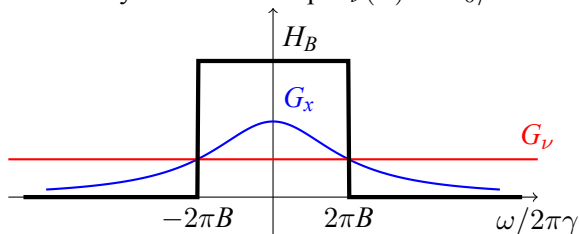
Известные спектры сигнала и помехи

$$H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_\nu(\omega)}; \quad \mathcal{M}\{\Delta^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{G_x(\omega)G_\nu(\omega)}{G_x(\omega) + G_\nu(\omega)}$$



Параметрическая оптимизация фильтра

Полезный сигнал имеет спектр $G_x(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2}$; $\alpha, \gamma > 0$
 Шум имеет спектр $G_v(\omega) = N_0/2$



Параметрическая оптимизация фильтра

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega$$

Параметрическая оптимизация фильтра

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= (G_x(\omega) + G_\nu(\omega)) |H(\omega)|^2 - 2G_x(\omega)H(\omega) + G_x(\omega) = \\ &= (G_\nu(\omega) - G_x(\omega))H(\omega) + G_x(\omega) \end{aligned}$$

Параметрическая оптимизация фильтра

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= (G_x(\omega) + G_\nu(\omega)) |H(\omega)|^2 - 2G_x(\omega)H(\omega) + G_x(\omega) = \\ &= (G_\nu(\omega) - G_x(\omega))H(\omega) + G_x(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\nu(\omega) H(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) H(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega \end{aligned}$$

Параметрическая оптимизация фильтра

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = N_0 B - \frac{\alpha^2}{2\pi^2 \gamma} \arctan \frac{B}{\gamma} + \frac{\alpha^2}{4\pi \gamma}$$

$$\text{Минимум: } \frac{\partial}{\partial B} \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{\min} = \gamma \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi^2 \gamma^2 N_0} - 1}$$

Параметрическая оптимизация фильтра

Отношение сигнал/шум

$$\text{Мощность сигнала } P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma}$$

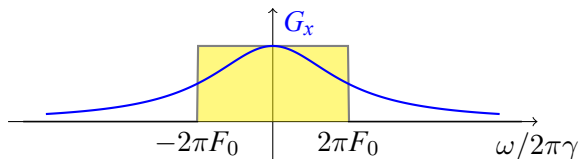
Пусть шум присутствует в полосе частот $-F_0 \dots F_0$; $F_0 \neq B$

Параметрическая оптимизация фильтра

Отношение сигнал/шум

$$\text{Мощность сигнала } P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma}$$

Пусть шум присутствует в полосе частот $-F_0 \dots F_0$; $F_0 \neq B$

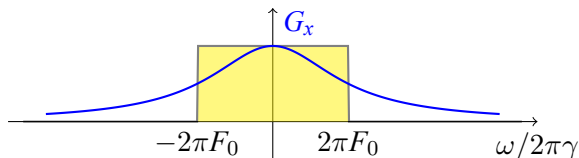


Параметрическая оптимизация фильтра

Отношение сигнал/шум

$$\text{Мощность сигнала } P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma}$$

Пусть шум присутствует в полосе частот $-F_0 \dots F_0$; $F_0 \neq B$



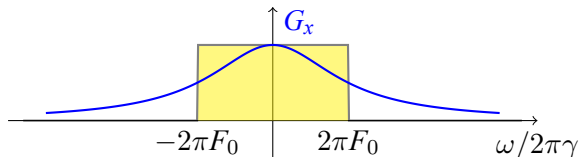
$$4\pi F_0 G_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{\pi\gamma}{2}$$

Параметрическая оптимизация фильтра

Отношение сигнал/шум

$$\text{Мощность сигнала } P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2 + (2\pi\gamma)^2} d\omega = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma}$$

Пусть шум присутствует в полосе частот $-F_0 \dots F_0$; $F_0 \neq B$



$$4\pi F_0 G_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) d\omega \Rightarrow F_0 = \frac{\pi\gamma}{2}$$

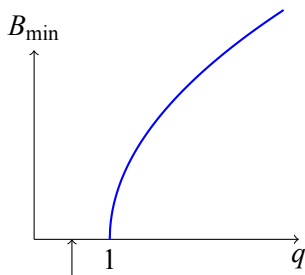
$$q = \frac{P_x}{P_v} = \frac{\alpha^2}{4\pi\gamma} \frac{2}{\pi\gamma N_0} = \frac{\alpha^2}{2\pi^2\gamma^2 N_0}$$

Параметрическая оптимизация фильтра

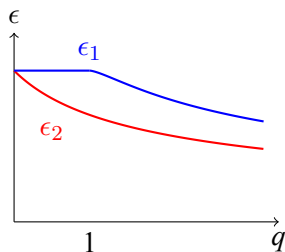
Отношение сигнал/шум

$$B_{\min} = \gamma\sqrt{q-1}; \quad \epsilon_1 = \frac{\mathcal{M}\{\Delta^2(t)\}}{P_x} = 1 + \frac{2\sqrt{q-1}}{\pi q} - \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{q-1}$$

$$H_{\text{opt}} = \frac{G_x(\omega)}{G_v(\omega) + G_x(\omega)}; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{1+q}}$$



нет такого фильтра



Винеровская фильтрация и причинность

Модифицированное уравнение Винера-Хопфа

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') \xi(t - t') dt'; \quad h(t)$$

Винеровская фильтрация и причинность

Модифицированное уравнение Винера-Хопфа

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') \xi(t-t') dt'; \quad h(t)$$

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} \rightarrow \min$$

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \iint_0^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') B_{\xi}(t' - t'') - 2 \int_0^{\infty} dt' h(t') B_{\xi x}(t') + B_x(0)$$

Винеровская фильтрация и причинность

Модифицированное уравнение Винера-Хопфа

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') \xi(t-t') dt'; \quad h(t)$$

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} \rightarrow \min$$

$$\mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} = \iint_0^{\infty} dt' dt'' h(t') h(t'') B_{\xi}(t' - t'') - 2 \int_0^{\infty} dt' h(t') B_{\xi x}(t') + B_x(0)$$

$$\int_0^{\infty} dt h_{\text{opt}}(t) B_{\xi}(\tau - t) = B_{\xi x}(\tau)$$

Винеровская фильтрация и причинность

Дробно-линейное представление спектра

$$G_{\xi}(\omega) = g^2 \frac{(\omega - \alpha_1) \cdot (\omega - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \alpha_m)}{(\omega - \beta_1) \cdot (\omega - \beta_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \beta_n)}$$

Винеровская фильтрация и причинность

Дробно-линейное представление спектра

$$G_{\xi}(\omega) = g^2 \frac{(\omega - \alpha_1) \cdot (\omega - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \alpha_m)}{(\omega - \beta_1) \cdot (\omega - \beta_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \beta_n)}$$

- G_{ξ} – спектр мощности, четная неотрицательная функция; $g^2 \in \mathbb{R}$;
- считаем, что нули и полюсы на действительной оси отсутствуют
- комплексные нули и полюсы - сопряженные

Винеровская фильтрация и причинность

Дробно-линейное представление спектра

$$G_{\xi}(\omega) = g^2 \frac{(\omega - \alpha_1) \cdot (\omega - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \alpha_m)}{(\omega - \beta_1) \cdot (\omega - \beta_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \beta_n)}$$

- G_{ξ} – спектр мощности, четная неотрицательная функция; $g^2 \in \mathbb{R}$;
- считаем, что нули и полюсы на действительной оси отсутствуют
- комплексные нули и полюсы - сопряженные

$$G_{\xi}(\omega) = g \frac{(\omega - \alpha_1) \cdot (\omega - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \alpha_{m/2})}{(\omega - \beta_1) \cdot (\omega - \beta_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \beta_{n/2})} \times \\ \times g \frac{(\omega - \bar{\alpha}_1) \cdot (\omega - \bar{\alpha}_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \bar{\alpha}_{m/2})}{(\omega - \bar{\beta}_1) \cdot (\omega - \bar{\beta}_2) \cdot \dots \cdot (\omega - \bar{\beta}_{n/2})} = Q(\omega) \cdot \overline{Q(\omega)}$$

Считаем, что $\text{Im } \alpha_j > 0$ и $\text{Im } \beta_j > 0$

Винеровская фильтрация и причинность

Операторы $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$

$$\text{Пусть } u_+(t) = \begin{cases} u(t) & t \geq 0; \\ 0; & t < 0 \end{cases} \text{ и } u_-(t) = \begin{cases} 0; & t > 0; \\ u(t); & t \leq 0 \end{cases}$$

Винеровская фильтрация и причинность

Операторы $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$

$$\text{Пусть } u_+(t) = \begin{cases} u(t) & t \geq 0; \\ 0; & t < 0 \end{cases} \text{ и } u_-(t) = \begin{cases} 0; & t > 0; \\ u(t); & t \leq 0 \end{cases}$$

$$U_+(\omega) = \mathbb{F}\{u_+(t)\} \text{ и } U_-(\omega) = \mathbb{F}\{u_-(t)\}$$

Винеровская фильтрация и причинность

Операторы $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$

$$\text{Пусть } u_+(t) = \begin{cases} u(t) & t \geq 0; \\ 0; & t < 0 \end{cases} \text{ и } u_-(t) = \begin{cases} 0; & t > 0; \\ u(t); & t \leq 0 \end{cases}$$

$$U_+(\omega) = \mathbb{F}\{u_+(t)\} \text{ и } U_-(\omega) = \mathbb{F}\{u_-(t)\}$$

$$U(\omega) = U_+(\omega) + U_-(\omega) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 u(t)e^{-i\omega t} dt$$

Винеровская фильтрация и причинность

Операторы $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$

$$\text{Пусть } u_+(t) = \begin{cases} u(t) & t \geq 0; \\ 0; & t < 0 \end{cases} \text{ и } u_-(t) = \begin{cases} 0; & t > 0; \\ u(t); & t \leq 0 \end{cases}$$

$$U_+(\omega) = \mathbb{F} \{u_+(t)\} \text{ и } U_-(\omega) = \mathbb{F} \{u_-(t)\}$$

$$U(\omega) = U_+(\omega) + U_-(\omega) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 u(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$U(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} u(t) \xrightarrow{+} u_+(t) \xrightarrow{\mathbb{F}} U_+(\omega)$$

Винеровская фильтрация и причинность

Среднеквадратичная ошибка

$$A(\omega) = \left| Q(\omega)H(\omega) - \frac{G_{\xi x}(\omega)}{Q(\omega)} \right|^2 + G_x(\omega) - \frac{|G_{\xi x}(\omega)|^2}{G_\xi(\omega)}$$

Пусть $Q(\omega)H(\omega) - \frac{G_{\xi x}(\omega)}{Q(\omega)} = U(\omega) = U_+(\omega) + U_-(\omega)$

Винеровская фильтрация и причинность

Среднеквадратичная ошибка

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) = \\ &= \Delta_{\min} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[|U_+(\omega)|^2 + |U_-(\omega)|^2 + U_+(\omega) \overline{U_-(\omega)} + \overline{U_+(\omega)} U_-(\omega) \right] \end{aligned}$$

Винеровская фильтрация и причинность

Среднеквадратичная ошибка

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) = \\ &= \Delta_{\min} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[|U_+(\omega)|^2 + |U_-(\omega)|^2 + U_+(\omega) \overline{U_-(\omega)} + \overline{U_+(\omega)} U_-(\omega) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(\omega) \overline{U_-(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u_+(t) e^{-i\omega t} \overline{U_-(\omega)} d\omega dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_+(t) \overline{u_-(t)} dt = 0$$

Винеровская фильтрация и причинность

Среднеквадратичная ошибка

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} \{ \Delta^2(t) \} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) = \\
 &= \Delta_{\min} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[|U_+(\omega)|^2 + |U_-(\omega)|^2 + U_+(\omega) \overline{U_-(\omega)} + \overline{U_+(\omega)} U_-(\omega) \right] \\
 &= \Delta_{\min} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[|U_+(\omega)|^2 + |U_-(\omega)|^2 \right]
 \end{aligned}$$

Винеровская фильтрация и причинность

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} h_{\text{opt}} * q \xrightarrow{-} [h_{\text{opt}} * q]_{-} \xrightarrow{\mathbb{F}} [h_{\text{opt}} * q]_{-}$$

Винеровская фильтрация и причинность

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} h_{\text{opt}} * q \xrightarrow{-} [h_{\text{opt}} * q]_{-} \xrightarrow{\mathbb{F}} [h_{\text{opt}} * q]_{-}$$

$$[h_{\text{opt}} * q]_{-}(\tau) = \int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t)q(\tau - t)dt$$

Винеровская фильтрация и причинность

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} h_{\text{opt}} * q \xrightarrow{-} [h_{\text{opt}} * q]_{-} \xrightarrow{\mathbb{F}} [h_{\text{opt}} * q]_{-}$$

$$[h_{\text{opt}} * q]_{-}(\tau) = \int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t)q(\tau - t)dt$$

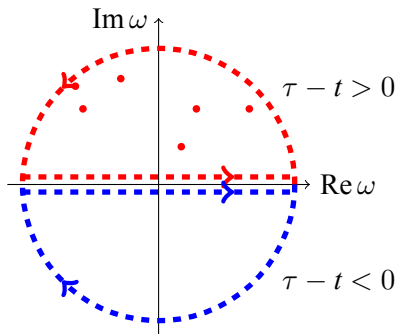
$$\tau < 0; t > 0 \quad \Rightarrow \quad q(\tau - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)e^{i\omega(\tau-t)}d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum \text{Выч}_j$$

Винеровская фильтрация и причинность

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} h_{\text{opt}} * q \xrightarrow{-} [h_{\text{opt}} * q]_{-} \xrightarrow{\mathbb{F}} [h_{\text{opt}} * q]_{-}$$

$$[h_{\text{opt}} * q]_{-}(\tau) = \int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t)q(\tau - t)dt$$

$$\tau < 0; t > 0 \Rightarrow q(\tau - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)e^{i\omega(\tau-t)}d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum \text{Выч}_j$$

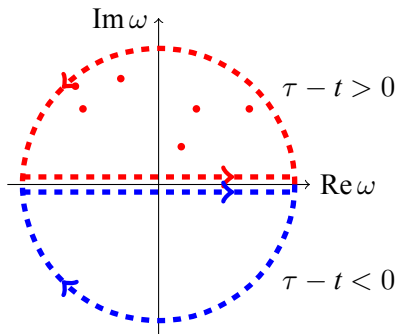


Винеровская фильтрация и причинность

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} h_{\text{opt}} * q \xrightarrow{-} [h_{\text{opt}} * q]_{-} \xrightarrow{\mathbb{F}} [h_{\text{opt}} * q]_{-}$$

$$[h_{\text{opt}} * q]_{-}(\tau) = \int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t)q(\tau - t)dt$$

$$\tau < 0; t > 0 \Rightarrow q(\tau - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)e^{i\omega(\tau-t)}d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum \text{Выч}_j$$



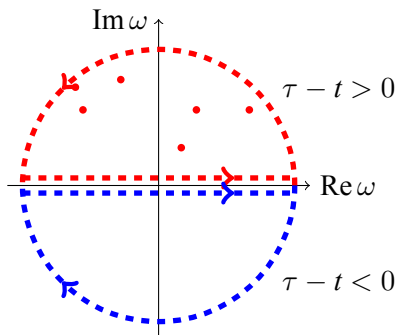
$$[h_{\text{opt}} * q]_{-} = 0$$

Винеровская фильтрация и причинность

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} h_{\text{opt}} * q \xrightarrow{-} [h_{\text{opt}} * q]_{-} \xrightarrow{\mathbb{F}} [h_{\text{opt}} * q]_{-}$$

$$[h_{\text{opt}} * q]_{-}(\tau) = \int_0^{\infty} h_{\text{opt}}(t)q(\tau - t)dt$$

$$\tau < 0; t > 0 \Rightarrow q(\tau - t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)e^{i\omega(\tau-t)}d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum \text{Выч}_j$$



$$[h_{\text{opt}} * q]_{-} = 0$$

$U_{-}(\omega)$ не зависит от H_{opt}

Винеровская фильтрация и причинность

Значит, нужно минимизировать только $U_+(\omega)$

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) \xrightarrow{\mathbb{F}^{-1}} h_{\text{opt}} * q \xrightarrow{+} [h_{\text{opt}} * q]_+ \xrightarrow{\mathbb{F}} [h_{\text{opt}} * q]_+$$

$$Q(\omega)H_{\text{opt}}(\omega) - \left[\frac{G_{\xi x}(\omega)}{Q(\omega)} \right]_+ = 0$$

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{1}{Q(\omega)} \left[\frac{G_{\xi x}(\omega)}{Q(\omega)} \right]_+$$

Винеровская фильтрация и причинность

Алгоритм

- Разложить спектр $G_{\xi}(\omega)$ на произведение $Q(\omega) \cdot \overline{Q(\omega)}$
- Вычислить взаимный спектр $G_{\xi x}(\omega)$
- Вычислить $r(t) = \mathbb{F}^{-1} \left\{ \frac{G_{\xi x}(\omega)}{\overline{Q(\omega)}} \right\}$
- Вычислить $\rho(t) = \begin{cases} r(t); & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$
- $H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{1}{Q(\omega)} \int_0^{\infty} \rho(t) e^{-i\omega t} dt$

Винеровская фильтрация и причинность

Важные частные случаи

Если сигнал и помеха независимы

$$H_{\text{opt}}(\omega) = \frac{1}{Q(\omega)} \int_0^{\infty} \rho(t) e^{-i\omega t} dt = 1 - \frac{1}{Q(\omega)} \left[\frac{G_{\nu}(\omega)}{Q(\omega)} \right]_+$$

Если $\nu(t)$ – белый шум с $G_{\nu}(\omega) = N_0/2$

$$H_{\text{opt}}(\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N_0/2}}{Q(\omega)}$$